2.3.11. Доказать, что если $f(x)$ имеет производную n-го порядка, то

$$[f(ax+b)]^{(n)} = a^n f^{(n)}(ax+b).$$

§ 2.4. Дифференцирование обратных функций и функций, заданных неявно или параметрически

1. Производная обратной функции. Если дифференцируемая функция $y=f(x)$, $a<x<b$ имеет однозначную непрерывную обратную функцию $x=g(y)$ и $y'_x \neq 0$, то x'_y также существует и

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}.$$

Для производной второго порядка имеем

$$x''_{yy} = -\frac{y''_{xx}}{(y'_x)^3}.$$

2. Производная неявной функции. Если дифференцируемая функция $y=y(x)$ удовлетворяет уравнению $F(x, y)=0$, то надо продифференцировать его по x, рассматривая y как функцию от x, и решить полученное уравнение $\frac{d}{dx}F(x, y)=0$ относительно y'_x. Чтобы найти y''_{xx}, надо уравнение дважды продифференцировать по x, и т. д.

3. Производная функции, заданной параметрически. Если система уравнений

$$x=\varphi(t), \qquad y=\psi(t), \qquad \alpha<t<\beta,$$

где $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ — дифференцируемые функции и $\varphi'(t) \neq 0$, определяет y как однозначную непрерывную функцию от x, то производная y'_x существует и

$$y'_x = \frac{\psi'_t(t)}{\varphi'_t(t)} = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Производные высших порядков вычисляют последовательно:

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}, \quad y'''_{xxx} = \frac{(y''_{xx})'_t}{x'_t}, \text{ и т. д.}$$

В частности, для производной второго порядка справедлива формула

$$y''_{xx} = \frac{x'_t y''_{tt} - x''_{tt} y'_t}{(x'_t)^3}.$$

2.4.1. Найти указанные производные:

а) $y=2x^3+3x^5+x$; найти x'_y;

б) $y=3x-(\cos x)/2$; найти x''_{yy};

в) $y=x+e^x$; найти x''_{yy}.

Решение. а) Имеем $y'_x=6x^2+15x^4+1$, следовательно,

$$x'_y = \frac{1}{y'_x} = \frac{1}{6x^2+15x^4+1}.$$

в) $y'_x = 1 + e^x$, $y''_{xx} = e^x$, следовательно,

$$x'_y = \frac{1}{1+e^x}, \quad x''_{yy} = -\frac{e^x}{(1+e^x)^3}.$$

2.4.2. Пользуясь правилом дифференцирования обратной функции, найти производную y'_x для следующих функций:

а) $y = \sqrt[3]{x}$; б) $y = \arcsin \sqrt{x}$; в) $y = \ln \sqrt{1+x^2}$.

Решение. а) Обратная функция $x = y^3$ имеет производную $x'_y = 3y^2$. Следовательно,

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{3y^2} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

в) При $x > 0$ обратная функция $x = \sqrt{e^{2y}-1}$ имеет производную $x'_y = e^{2y}/\sqrt{e^{2y}-1}$. Следовательно,

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{\sqrt{e^{2y}-1}}{e^{2y}} = \frac{\sqrt{x^2}}{x^2+1} = \frac{x}{x^2+1}.$$

2.4.3. Для следующих функций, заданных параметрически, найти производные первого порядка от y по x:

а) $x = a(t - \sin t)$, $\quad y = a(1 - \cos t)$;

б) $x = k \sin t - \sin kt$, $\quad y = k \cos t + \cos kt$;

в) $x = 2 \ln \operatorname{ctg} t$, $\quad y = \operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t$;

г) $x = e^{ct}$, $\quad y = e^{-ct}$.

Решение. а) Находим производные от x и y по параметру t:

$$x'_t = a(1 - \cos t); \qquad y'_t = a \sin t.$$

Отсюда

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a \sin t}{a(1-\cos t)} = \operatorname{ctg}\frac{t}{2} \qquad (t \neq 2k\pi).$$

в) $$\frac{dx}{dt} = \frac{-2\operatorname{cosec}^2 t}{\operatorname{ctg} t} = -\frac{4}{\sin 2t};$$

$$\frac{dy}{dt} = \sec^2 t - \operatorname{cosec}^2 t = -\frac{4\cos 2t}{\sin^2 2t};$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4\cos 2t \sin 2t}{4\sin^2 2t} = \operatorname{ctg} 2t \qquad \left(t \neq \frac{k\pi}{2}\right).$$

2.4.4. Функции заданы параметрически:

а) $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = b \sin^3 t; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x = t^3 + 3t + 1, \\ y = t^3 - 3t + 1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x = a(\cos t + t \sin t), \\ y = a(\sin t - t\cos t); \end{cases}$ г) $\begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t. \end{cases}$

Определить для них производную второго порядка от y по x.

Решение. а) Найдем сначала y'_x:

$$y'_t = 3b\sin^2 t\cos t; \quad x'_t = -3a\cos^2 t\sin t;$$

$$y'_x = -\frac{3b\sin^2 t\cos t}{3a\cos^2 t\sin t} = -\frac{b}{a}\operatorname{tg} t \qquad \left(t \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}\right).$$

Далее будем искать y''_{xx} по формуле

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t},$$

где

$$(y'_x)'_t = -\frac{b}{a\cos^2 t}.$$

Отсюда

$$y''_{xx} = -\frac{b}{a\cos^2 t(-3a\cos^2 t\sin t)} = \frac{b}{3a^2\cos^4 t\sin t}.$$

г) $x'_t = e^t\cos t - e^t\sin t = e^t(\cos t - \sin t)$;

$y'_t = e^t\sin t + e^t\cos t = e^t(\cos t + \sin t)$;

$$y'_x = \frac{\cos t + \sin t}{\cos t - \sin t};$$

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{\left(\frac{\cos t + \sin t}{\cos t - \sin t}\right)'_t}{e^t(\cos t - \sin t)} = \frac{2}{e^t(\cos t - \sin t)^3}.$$

2.4.5. В следующих примерах найти y'''_{xxx}:

а) $x = e^{-t}$; $y = t^3$; б) $x = \sec t$; $y = \operatorname{tg} t$.

Решение. а) Сначала найдем

$$x'_t = -e^{-t}; \quad y'_t = 3t^2,$$

отсюда

$$y'_x = -3t^2/e^{-t} = -3e^t t^2.$$

Затем найдем вторую производную

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{-(3e^t t^2 + 6te^t)}{-e^{-t}} = 3te^{2t}(t+2).$$

И наконец, найдем третью производную

$$y'''_{xxx} = \frac{(y''_{xx})'_t}{x'_t} = \frac{3e^{2t}[2(t^2+2t)+2t+2]}{-e^{-t}} = -6e^{3t}(t^2+3t+1).$$

2.4.6. Найти производную y'_x от следующих функций $y(x)$, заданных неявно:

а) $x^3 + x^2y + y^2 = 0$; б) $\ln x + e^{-y/x} = c$;

в) $x^2 + y^2 - 4x - 10y + 4 = 0$; г) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

Решение. а) Дифференцируем по x, считая y функцией от x; получим

$$3x^2 + 2xy + x^2y' + 2yy' = 0.$$

Решая это уравнение относительно y', найдем

$$y' = -\frac{3x^2+2xy}{x^2+2y}.$$

2.4.7. Найти y''_{xx}, если:

а) $\operatorname{arctg} y - y + x = 0$; б) $e^x - e^y = y - x$;

в) $x + y = e^{x-y}$.

Решение. а) Дифференцируем по x, считая y функцией от x, и определяем y':

$$\frac{y'}{1+y^2} - y' + 1 = 0, \quad \text{откуда} \quad y' = \frac{1+y^2}{y^2} = y^{-2} + 1.$$

Дифференцируем еще раз по x:

$$y'' = -2y^{-3}y'.$$

Подставив найденное значение y', окончательно получим

$$y''_{xx} = -\frac{2(1+y^2)}{y^5}.$$

2.4.8. Найти значение y'' в точке $x=1$, если

$$x^3 - 2x^2y^2 + 5x + y - 5 = 0 \quad \text{и} \quad y|_{x=1} = 1.$$

Решение. Продифференцировав по x, найдем, что

$$3x^2 - 4xy^2 - 4x^2yy' + 5 + y' = 0.$$

Полагая $x=1$ и $y=1$, получим значение y' при $x=1$:

$$3 - 4 - 4y' + 5 + y' = 0; \qquad y' = 4/3.$$

Еще раз дифференцируем по x;

$$6x - 4y^2 - 8xyy' - 8xyy' - 4x^2y'^2 - 4x^2yy'' + y'' = 0.$$

Полагая $x=1$; $y=1$ и $y'=4/3$, найдем значение y'' при $x=1$:

$$6 - 4 - \frac{64}{3} - \frac{64}{9} - 3y'' = 0, \qquad y'' = -8\frac{22}{27}.$$

2.4.9. Найти y'_x для следующих функций, заданных неявно:

а) $x + \sqrt{xy} + y = a$; б) $\operatorname{arctg}(y/x) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$;

в) $e^x \sin y - e^{-y}\cos x = 0$;

г) $e^y + xy = e$; найти y'_x в точке $(0, 1)$.

2.4.10. Найти y''_{xx} от следующих функций, заданных неявно:

а) $y = x + \operatorname{arctg} y$;

б) $x^2 + 5xy + y^2 - 2x + y - 6 = 0$; найти y'' в точке $(1, 1)$.

2.4.11. Для следующих функций, заданных параметрически, найти указанные производные:

а) $x=\frac{a\sin t}{1+b\cos t}$, $\quad y=\frac{c\cos t}{1+b\cos t}$; $\quad$ найти y'_x;

б) $x=\ln(1+t^2)$, $\quad y=t-\operatorname{arctg} t$; $\quad$ найти y'_x;

в) $x=t^2+2$, $\quad y=t^3/3-t$; $\quad$ найти y''_{xx};

г) $x=e^{-t^2}$, $\quad y=\operatorname{arctg}(2t+1)$; $\quad$ найти y'_x;

д) $x=4\operatorname{tg}^2(t/2)$, $\quad y=a\sin t+b\cos t$; $\quad$ найти y'_x;

е) $x=\arcsin(t^2-1)$, $\quad y=\arccos 2t$; $\quad$ найти y'_x;

ж) $x=\arcsin t$, $\quad y=\sqrt{1-t^2}$; $\quad$ найти y''_{xx}.

2.4.12. Показать, что функция $y=f(x)$, заданная параметрическими уравнениями $x=e^t\sin t$, $y=e^t\cos t$, удовлетворяет соотношению $y''(x+y)^2=2(xy'-y)$.

§ 2.5. Приложения производной

Уравнение касательной к графику дифференцируемой функции $y=y(x)$ в точке $M(x_0, y_0)$, где $y_0=y(x_0)$, имеет вид

$$y-y_0=y'(x_0)(x-x_0).$$

Уравнение нормали в той же точке имеет вид

$$y-y_0=-\frac{1}{y'(x_0)}(x-x_0), \qquad y'(x_0)\neq 0.$$

Отрезки AT, AN называются соответственно *подкасательной* и *поднормалью*, а длины отрезков MT и MN — *длинами* касательной и нормали (рис. 36). Длины указанных отрезков выражаются следующими формулами:

$$AT=\left|\frac{y}{y'}\right|; \quad AN=|yy'|,$$

$$MT=\left|\frac{y}{y'}\right|\sqrt{1+y'^2},$$

$$MN=|y|\sqrt{1+y'^2}.$$

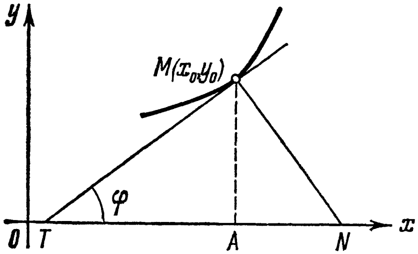

Рис. 36.

2.5.1. Составить уравнения касательной и нормали:

а) к кривой $y=x^3-3x+2$ в точке $(2, 4)$;

б) к параболе $y=2x^2-x+5$ при $x=-0{,}5$;

в) к кривой $y=x^4+3x^2-16$ в точках ее пересечения с параболой $y=3x^2$.

Решение. а) Найдем производную в точке $x=2$:

$$y'=3x^2-3, \qquad y'(2)=9.$$

Уравнение касательной имеет такой вид:

$$y-4=9(x-2) \quad \text{или} \quad 9x-y-14=0.$$

Уравнение нормали имеет вид

$$y-4=-\frac{1}{9}(x-2) \quad \text{или} \quad x+9y-38=0.$$