а) $x=\frac{a\sin t}{1+b\cos t}$, $y=\frac{c\cos t}{1+b\cos t}$; найти y'_x;

б) $x=\ln(1+t^2)$, $y=t-\operatorname{arctg} t$; найти y'_x;

в) $x=t^2+2$, $y=t^3/3-t$; найти y''_{xx};

г) $x=e^{-t^2}$, $y=\operatorname{arctg}(2t+1)$; найти y'_x;

д) $x=4\operatorname{tg}^2(t/2)$, $y=a\sin t+b\cos t$; найти y'_x;

е) $x=\arcsin(t^2-1)$, $y=\arccos 2t$; найти y'_x;

ж) $x=\arcsin t$, $y=\sqrt{1-t^2}$; найти y''_{xx}.

2.4.12. Показать, что функция $y=f(x)$, заданная параметрическими уравнениями $x=e^t\sin t$, $y=e^t\cos t$, удовлетворяет соотношению $y''(x+y)^2=2(xy'-y)$.

§ 2.5. Приложения производной

Уравнение касательной к графику дифференцируемой функции $y=y(x)$ в точке $M(x_0, y_0)$, где $y_0=y(x_0)$, имеет вид

$$y-y_0=y'(x_0)(x-x_0).$$

Уравнение нормали в той же точке имеет вид

$$y-y_0=-\frac{1}{y'(x_0)}(x-x_0), \qquad y'(x_0)\neq 0.$$

Отрезки AT, AN называются соответственно *подкасательной* и *поднормалью*, а длины отрезков MT и MN — *длинами* касательной и нормали (рис. 36). Длины указанных отрезков выражаются следующими формулами:

$$AT=\left|\frac{y}{y'}\right|; \quad AN=|yy'|,$$

$$MT=\left|\frac{y}{y'}\right|\sqrt{1+y'^2},$$

$$MN=|y|\sqrt{1+y'^2}.$$

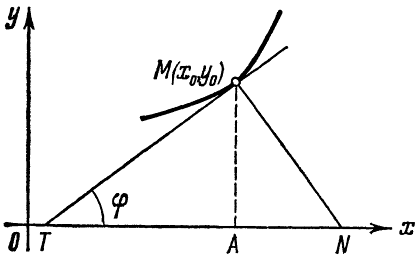

Рис. 36.

2.5.1. Составить уравнения касательной и нормали:

а) к кривой $y=x^3-3x+2$ в точке $(2, 4)$;

б) к параболе $y=2x^2-x+5$ при $x=-0,5$;

в) к кривой $y=x^4+3x^2-16$ в точках ее пересечения с параболой $y=3x^2$.

Решение. а) Найдем производную в точке $x=2$:

$$y'=3x^2-3, \qquad y'(2)=9.$$

Уравнение касательной имеет такой вид:

$$y-4=9(x-2) \quad \text{или} \quad 9x-y-14=0.$$

Уравнение нормали имеет вид

$$y-4=-\frac{1}{9}(x-2) \quad \text{или} \quad x+9y-38=0.$$

в) Решив систему уравнений

$$\begin{cases} y = x^4 + 3x^2 - 16, \\ y = 3x^2, \end{cases}$$

найдем точки пересечения кривых $x_1 = -2$, $x_2 = 2$, $y_1 = y_2 = 12$.

Найдем теперь производную в точках $x = -2$ и $x = 2$:

$$y' = 4x^3 + 6x, \quad y'(-2) = -44, \quad y'(2) = 44.$$

Поэтому уравнения касательных имеют вид

$$y - 12 = -44(x + 2), \quad y - 12 = 44(x - 2).$$

Уравнения нормалей имеют вид

$$y - 12 = \frac{1}{44}(x + 2), \quad y - 12 = -\frac{1}{44}(x - 2).$$

2.5.2. На кривой $y = x^3 - 3x + 5$ найти точки, в которых касательная:

а) параллельна прямой $y = -2x$;

б) перпендикулярна к прямой $y = -x/9$;

в) составляет с положительным направлением оси Ox угол $45°$.

Решение. Для отыскания требуемых точек принимаем во внимание тот факт, что в точке касания угловой коэффициент касательной равняется производной $y' = 3x^2 - 3$, вычисленной в этой точке.

а) Из условия параллельности

$$3x^2 - 3 = -2,$$

откуда $x_1 = -1/\sqrt{3}$, $x_2 = 1/\sqrt{3}$. Искомые точки:

$$M_1(-1/\sqrt{3},\ 5 + 8\sqrt{3}/9), \quad M_2(1/\sqrt{3},\ 5 - 8\sqrt{3}/9).$$

б) Из условия перпендикулярности

$$3x^2 - 3 = 9,$$

откуда $x_1 = -2$, $x_2 = 2$. Искомые точки $M_1(-2,\ 3)$, $M_2(2,\ 7)$.

2.5.3. Найти углы, под которыми пересекаются следующие линии:

а) прямая $y = 4 - x$ и парабола $y = 4 - x^2/2$;

б) синусоида $y = \sin x$ и косинусоида $y = \cos x$.

Решение. а) Напомним, что углом между двумя кривыми в точке их пересечения называется угол между касательными к этим кривым, проведенными в этой точке. Найдем точки пересечения кривых, решив систему уравнений

$$\begin{cases} y = 4 - x, \\ y = 4 - x^2/2. \end{cases}$$

Отсюда

$$M_1(0,\ 4); \quad M_2(2,\ 2).$$

Далее определяем угловые коэффициенты касательных к параболе в точках M_1 и M_2:

$$y'(0)=0, \quad y'(2)=-2.$$

Угловой коэффициент прямой во всех точках один и тот же и равен в нашем случае -1. Теперь определяем угол между двумя прямыми:

$$\operatorname{tg}\varphi_1=1; \quad \varphi_1=45°;$$
$$\operatorname{tg}\varphi_2=\frac{-1+2}{1+2}=\frac{1}{8}; \quad \varphi_2=\operatorname{arctg}\frac{1}{8}\approx 18{,}5°.$$

2.5.4. Доказать, что отрезок касательной к гиперболе $y=c/x$, заключенный между координатными осями, делится в точке касания пополам.

Решение. Имеем $y'=-c/x^2$, следовательно, для касательной в точке $M(x_0, y_0)$ величина подкасательной

$$\left|\frac{y}{y'}\right|=|x_0|,$$

т. е. $Ox_0=x_0T$ (рис. 37), что и требовалось доказать.

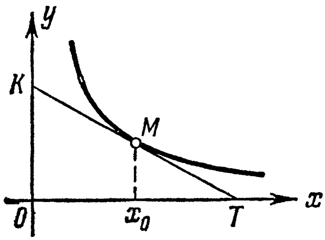

Рис. 37.

Отсюда вытекает простой способ построения касательной к гиперболе $y=c/x$: надо отложить на оси Ox отрезок $OT=2x_0$. Тогда MT будет искомой касательной.

2.5.5. Доказать, что у цепной линии $y=a\operatorname{ch}(x/a)$ ордината есть среднее геометрическое между длиной нормали и величиной a.

Решение. Вычислим длину нормали. Так как

$$y'=\operatorname{sh}(x/a),$$

то длина нормали

$$MN=|y|\sqrt{1+y'^2}=y\sqrt{1+\operatorname{sh}^2(x/a)}=y\operatorname{ch}(x/a)=y^2/a,$$

откуда $y^2=a\cdot MN$, $y=\sqrt{a\cdot MN}$, что и требовалось доказать.

2.5.6. Найти угловой коэффициент касательной к кривой

$$\begin{cases} x=t^2+3t-8, \\ y=2t^2-2t-5 \end{cases}$$

в точке $M(2, -1)$.

Решение. Прежде всего нужно определить значение t, соответствующее данным значениям x и y. Это значение должно одновременно удовлетворять двум уравнениям:

$$\begin{cases} t^2+3t-8=2, \\ 2t^2-2t-5=-1. \end{cases}$$

Корни первого уравнения: $t_1=2$; $t_2=-5$, корни второго уравнения: $t_1=2$; $t_3=-1$.

Следовательно, данной точке соответствует значение $t=2$. Теперь определим значение производной в точке M:

$$y'|_{x=2}=\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)_{t=2}=\left(\frac{4t-2}{2t+3}\right)_{t=2}=\frac{6}{7}.$$

Итак, угловой коэффициент касательной в точке $M(2, -1)$ равен $6/7$.

2.5.7. Доказать, что касательная к лемнискате $\rho=a\sqrt{\cos 2\theta}$ в точке, соответствующей значению $\theta_0=\pi/6$, параллельна оси Ox.

Решение. Напишем уравнение лемнискаты в параметрическом виде. Имеем

$$x=\rho\cos\theta=a\sqrt{\cos 2\theta}\cos\theta,$$
$$y=\rho\sin\theta=a\sqrt{\cos 2\theta}\sin\theta.$$

Отсюда

$$x'_\theta=-\frac{a\cos\theta\sin 2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}-a\sqrt{\cos 2\theta}\sin\theta,$$
$$y'_\theta=-\frac{a\sin\theta\sin 2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}+a\sqrt{\cos 2\theta}\cos\theta,$$
$$x'_\theta(\pi/6)=-a\sqrt{2},\qquad y'_\theta(\pi/6)=0.$$

Таким образом, угловой коэффициент $k=\dfrac{y'_\theta(\pi/6)}{x'_\theta(\pi/6)}=0$. Следовательно, касательная к лемнискате в точке с $\theta_0=\pi/6$ и $\rho_0=a\sqrt{\cos 2\theta_0}=a/\sqrt{2}$ параллельна оси Ox.

2.5.8. Найти уравнения касательной и нормали к кривой

а) $4x^3-3xy^2+6x^2-5xy-8y^2+9x+14=0$ в точке $(-2, 3)$;

б) $x^5+y^5-2xy=0$ в точке $(1, 1)$.

Решение. а) Дифференцируем функцию, заданную неявно:

$$12x^2-3y^2-6xyy'+12x-5y-5xy'-16yy'+9=0.$$

Подставим координаты точки $M(-2, 3)$:

$$48-27+36y'-24-15+10y'-48y'+9=0;$$

отсюда

$$y'=-9/2.$$

Следовательно, уравнение касательной: $y-3=-\dfrac{9}{2}(x+2)$. Уравнение нормали: $y-3=\dfrac{2}{9}(x+2)$.

2.5.9. Через точку $(2, 0)$, не лежащую на кривой $y=x^4$, провести касательные к ней.

Решение. Пусть (x_0, x_0^4) — точка касания; тогда уравнение касательной запишется так:

$$y-x_0^4=y'(x_0)(x-x_0)$$

или

$$y-x_0^4=4x_0^3(x-x_0).$$

По условию искомая касательная проходит через точку (2, 0), значит, координаты этой точки удовлетворяют уравнению касательной:

$$-x_0^4 = 4x_0^3(2-x_0); \qquad 3x_0^4 - 8x_0^3 = 0.$$

Отсюда $x_0 = 0$; $x_0 = 8/3$. Таким образом, точек касания две: $M_1(0, 0)$, $M_2(8/3, 4096/81)$.

Соответственно уравнения касательных будут

$$y = 0, \quad y - \frac{4096}{81} = \frac{2048}{27}\left(x - \frac{8}{3}\right).$$

2.5.10. $f(x) = 3x^5 - 15x^3 + 5x - 7$. Выяснить, в какой из точек x скорость изменения функции наименьшая?

Решение. Скорость изменения функции в некоторой точке равна производной функции в этой точке:

$$f'(x) = 15x^4 - 45x^2 + 5 = 15\left[(x^2 - 1/2)^2 + 1/12\right].$$

Наименьшее значение $f'(x)$ достигается при $x = \pm 1/\sqrt{2}$. Следовательно, наименьшая скорость изменения функции $f(x)$ достигается в точках $x = \pm 1/\sqrt{2}$ и равна 5/4.

2.5.11. Точка движется по кубической параболе $12y = x^3$. Какая из ее координат изменяется быстрее?

Решение. Дифференцируя обе части данного уравнения по времени t, получим соотношение между скоростями изменения координат:

$$12y'_t = 3x^2 \cdot x'_t$$

или

$$\frac{y'_t}{x'_t} = \frac{x^2}{4}.$$

Следовательно,

1) при $-2 < x < 2$ отношение $y'_t : x'_t$ меньше единицы, т. е. скорость изменения ординаты меньше скорости изменения абсциссы;

2) при $x = \pm 2$ отношение $y'_t : x'_t$ равно единице, т. е. в этих точках скорости изменения координат равны;

3) при $x < -2$ или $x > 2$ отношение $y'_t : x'_t$ больше единицы, т. е. скорость изменения ординаты больше скорости изменения абсциссы.

2.5.12. Тело массой 6 *г* движется прямолинейно по закону $s = -1 + \ln(t+1) + (t+1)^3$ (s выражено в сантиметрах, t — в секундах). Требуется вычислить кинетическую энергию ($mv^2/2$) через 1 *сек* после начала движения.

Решение. Скорость движения равна производной пути по времени:

$$v(t) = s'_t = \frac{1}{t+1} + 3(t+1)^2.$$

Поэтому

$$v(1) = 12\frac{1}{2} \text{ и } \frac{mv^2}{2} = \frac{6}{2}\left(12\frac{1}{2}\right)^2 = 468\frac{3}{4} \ (\textit{эрг}).$$

2.5.13. Скорость прямолинейного движения тела пропорциональна квадратному корню из пройденного пути s (как, например, при свободном падении тела). Доказать, что тело движется под действием постоянной силы.

Решение. По условию имеем

$$v = s'_t = \alpha \sqrt{s} \qquad (\alpha = \text{const});$$

отсюда

$$s''_{tt} = v'_t = \alpha \frac{1}{2\sqrt{s}} \; s'_t = \alpha^2/2.$$

Но по закону Ньютона сила

$$F = ks''_{tt} \qquad (k = \text{const}).$$

Следовательно,

$$F = k\alpha^2/2 = \text{const}.$$

2.5.14. Плот подтягивается к берегу при помощи каната, который наматывается на ворот со скоростью 3 *м/мин*. Определить скорость движения плота в тот момент, когда его расстояние от берега будет равно 25 *м*, если ворот расположен на берегу выше поверхности воды на 4 *м*.

Решение. Обозначим через s длину каната между воротом и плотом и через x — расстояние от плота до берега. По условию

$$s^2 = x^2 + 4^2.$$

Дифференцируя это соотношение по времени t, найдем зависимость между их скоростями:

$$2ss'_t = 2xx'_t,$$

откуда

$$x'_t = \frac{s}{x} s'_t.$$

Учитывая, что

$$s'_t = 3; \quad x = 25; \quad s = \sqrt{25^2 + 4^2} \approx 25{,}3,$$

получаем

$$x'_t = \frac{\sqrt{25^2 + 4^2}}{25} \cdot 3 \approx 3{,}03 \text{ (м/мин)}.$$

2.5.15. а) Найти угол наклона касательной к кубической параболе $y = x^3$ в точке $x = \sqrt{3}/3$.

б) Написать уравнения касательных к кривой $y = 1/(1 + x^2)$ в точках ее пересечения с гиперболой $y = 1/(x + 1)$.

в) Написать уравнение нормали к параболе $y = x^2 + 4x + 1$, перпендикулярной к прямой, соединяющей начало координат с вершиной параболы.

г) Под каким углом кривая $y = e^x$ пересекает ось Oy?

2.5.16. Скорость тела, движущегося прямолинейно, определяется формулой $v = 3t + t^2$.

Какое ускорение будет иметь тело через 4 секунды после начала движения?

2.5.17. Тело массой 100 *кг* движется прямолинейно по закону $s=2t^2+3t+1$. Определить кинетическую энергию $(mv^2/2)$ тела через 5 секунд после начала движения.

2.5.18. Показать, что если тело движется по закону $s=ae^t+be^{-t}$, то его ускорение численно равно пройденному пути.

2.5.19. Тело брошено вертикально вверх с начальной скоростью a *м/сек*. На какой высоте будет оно через t секунд? Определить скорость движения тела. Через сколько секунд тело достигнет наивысшей точки и на каком расстоянии от земли?

2.5.20. Искусственные спутники Земли движутся вокруг Земли по эллиптическим орбитам. Расстояние r спутника от центра Земли может быть приближенно выражено в зависимости от времени t следующим уравнением:

$$r=a\left[1-\varepsilon\cos M-\frac{\varepsilon^2}{2}(\cos 2M-1)\right],\ \text{где}\ M=\frac{2\pi}{P}(t-t_n).$$

Здесь a, ε, P и t_n — постоянные: a — большая полуось орбиты, ε — ее эксцентриситет, P — период обращения искусственного спутника Земли (ИСЗ), а t_n — время прохождения ИСЗ через перигей (перигей ИСЗ — кратчайшее расстояние ИСЗ от центра Земли). Найти скорость изменения расстояния r ИСЗ от центра Земли (т. е. найти так называемую радиальную скорость ИСЗ).

§ 2.6. Дифференциал функции. Приложение к приближенным вычислениям

Если приращение Δy функции $y=f(x)$ может быть представлено так:

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=A(x)\,\Delta x+\alpha(x,\ \Delta x)\,\Delta x,$$

где

$$\lim_{\Delta x\to 0}\alpha(x,\ \Delta x)=0,$$

то такая функция называется *дифференцируемой* в точке x. Главная линейная часть этого приращения $A(x)\,\Delta x$ называется *дифференциалом* функции и обозначается $df(x)$ или dy. По определению, $dx=\Delta x$.

Для существования дифференциала функции $y=f(x)$ необходимо и достаточно, чтобы существовала конечная производная $y'=A(x)$. Дифференциал функции можно записать следующим образом:

$$dy=y'\,dx=f'(x)\,dx.$$

Для сложной функции $y=f(u)$, $u=\varphi(x)$ форма дифференциала сохраняется в виде

$$dy=f'(u)\,du$$

(инвариантность формы дифференциала).

Если Δx достаточно мало́ по абсолютной величине, то с точностью до малых более высокого порядка, чем Δx, имеет место приближенная формула $\Delta y\approx dy$. Только для линейной функции $y=ax+b$ имеем $\Delta y=dy$.