Какое ускорение будет иметь тело через 4 секунды после начала движения?

2.5.17. Тело массой 100 *кг* движется прямолинейно по закону $s=2t^2+3t+1$. Определить кинетическую энергию ($mv^2/2$) тела через 5 секунд после начала движения.

2.5.18. Показать, что если тело движется по закону $s=ae^t+be^{-t}$, то его ускорение численно равно пройденному пути.

2.5.19. Тело брошено вертикально вверх с начальной скоростью a *м/сек*. На какой высоте будет оно через t секунд? Определить скорость движения тела. Через сколько секунд тело достигнет наивысшей точки и на каком расстоянии от земли?

2.5.20. Искусственные спутники Земли движутся вокруг Земли по эллиптическим орбитам. Расстояние r спутника от центра Земли может быть приближенно выражено в зависимости от времени t следующим уравнением:

$$r=a\left[1-\varepsilon\cos M-\frac{\varepsilon^2}{2}(\cos 2M-1)\right],\ \text{где}\ M=\frac{2\pi}{P}(t-t_n).$$

Здесь a, ε, P и t_n — постоянные: a — большая полуось орбиты, ε — ее эксцентриситет, P — период обращения искусственного спутника Земли (ИСЗ), а t_n — время прохождения ИСЗ через перигей (перигей ИСЗ — кратчайшее расстояние ИСЗ от центра Земли). Найти скорость изменения расстояния r ИСЗ от центра Земли (т. е. найти так называемую радиальную скорость ИСЗ).

§ 2.6. Дифференциал функции. Приложение к приближенным вычислениям

Если приращение Δy функции $y=f(x)$ может быть представлено так:

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=A(x)\,\Delta x+\alpha(x,\ \Delta x)\,\Delta x,$$

где

$$\lim_{\Delta x\to 0}\alpha(x,\ \Delta x)=0,$$

то такая функция называется *дифференцируемой* в точке x. Главная линейная часть этого приращения $A(x)\,\Delta x$ называется *дифференциалом* функции и обозначается $df(x)$ или dy. По определению, $dx=\Delta x$.

Для существования дифференциала функции $y=f(x)$ необходимо и достаточно, чтобы существовала конечная производная $y'=A(x)$. Дифференциал функции можно записать следующим образом:

$$dy=y'\,dx=f'(x)\,dx.$$

Для сложной функции $y=f(u)$, $u=\varphi(x)$ форма дифференциала сохраняется в виде

$$dy=f'(u)\,du$$

(инвариантность формы дифференциала).

Если Δx достаточно мало́ по абсолютной величине, то с точностью до малых более высокого порядка, чем Δx, имеет место приближенная формула $\Delta y\approx dy$. Только для линейной функции $y=ax+b$ имеем $\Delta y=dy$.

Дифференциалы высших порядков функции $y=f(x)$ последовательно определяются так:

$$d^2y=d(dy);\quad d^3y=d(d^2y),\ \ldots,\quad d^ny=d(d^{n-1}y).$$

Если $y=f(x)$ и x — независимая переменная, то

$$d^2y=y''(dx)^2;\quad d^3y=y'''(dx)^3,\ \ldots,\quad d^ny=y^{(n)}(dx)^n.$$

Если же $y=f(u)$, где $u=\varphi(x)$, то $d^2y=f''(u)\,du^2+f'(u)\,d^2u$ и т. д.

2.6.1. Найти дифференциал функции

$$y=\ln(1+e^{10x})+\operatorname{arctg} e^{5x}.$$

Вычислить dy при $x=0$; $dx=0,2$.

Решение.

$$dy=\left[\frac{(1+e^{10x})'}{1+e^{10x}}-\frac{(e^{5x})'}{1+e^{10x}}\right]dx=\frac{5e^{5x}(2e^{5x}-1)}{1+e^{10x}}\,dx.$$

Подставив $x=0$ и $dx=0,2$, получим

$$dy\,|_{x=0;\ dx=0,2}=\frac{5}{2}\cdot 0,2=0,5.$$

2.6.2. Найти приращение и дифференциал функции

$$y=3x^3+x-1$$

в точке $x=1$ при $\Delta x=0,1$.

Найти абсолютную и относительную погрешности, которые допускаются при замене приращения функции ее дифференциалом.

Решение.

$$\Delta y=[3(x+\Delta x)^3+(x+\Delta x)-1]-(3x^3+x-1)=$$
$$=9x^2\Delta x+9x\Delta x^2+3\Delta x^3+\Delta x,$$
$$dy=(9x^2+1)\,\Delta x.$$

Отсюда

$$\Delta y-dy=9x\Delta x^2+3\Delta x^3.$$

При $x=1$ и $\Delta x=0,1$ получаем

$$\Delta y-dy=0,09+0,003=0,093,$$
$$dy=1;\quad \Delta y=1,093.$$

Абсолютная погрешность $|\Delta y-dy|=0,093$, относительная погрешность равна $\left|\frac{\Delta y-dy}{\Delta y}\right|=\frac{0,093}{1,093}\approx 0,085$ или $8,5\%$.

2.6.3. Вычислить приближенно приращение функции

$$y=x^3-7x^2+8$$

при изменении x от значения 5 к значению 5,01.

2.6.4. Пользуясь понятием дифференциала, найти приближенное значение функции

$$y=\sqrt[5]{\frac{2-x}{2+x}}\quad \text{при}\quad x=0,15.$$

Решение. Заметим, что из $\Delta y = y(x+\Delta x) - y(x)$ получаем

$$y(x+\Delta x) = y(x) + \Delta y,$$

или, полагая $\Delta y \approx dy$,

$$y(x+\Delta x) \approx y(x) + dy. \qquad (*)$$

В нашей задаче положим $x=0$ и $\Delta x = 0{,}15$. Тогда

$$y' = \frac{1}{5}\sqrt[5]{\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^4}\cdot\frac{(-4)}{(2+x)^2};$$

$$y'(0) = -\frac{1}{5}, \qquad dy = -\frac{1}{5}\cdot 0{,}15 = -0{,}03.$$

Следовательно,

$$y(0{,}15) \approx y(0) + dy = 1 - 0{,}03 = 0{,}97.$$

Истинное значение $y(0{,}15) = 0{,}9702$ с точностью до 10^{-4}.

2.6.5. Найти приближенное значение:

а) $\cos 31°$; б) $\lg 10{,}21$; в) $\sqrt[5]{33}$; г) $\operatorname{ctg} 45°10'$.

Решение. а) При решении мы будем пользоваться формулой (*) (задача **2.6.4**). Полагаем $x=\pi/6$, $\Delta x = \pi/180$ и вычисляем:

$$y(x) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$y'(x) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2};$$

$$\cos 31° = \cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{180}\right) \approx \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\,\frac{\pi}{180} = 0{,}851.$$

в) Полагаем $x=32$; $\Delta x = 1$. По формуле (*) получим

$$\sqrt[5]{33} \approx \sqrt[5]{32} + (\sqrt[5]{x})'_{x=32}\cdot 1 = 2 + \frac{1}{5\sqrt[5]{32^4}} = 2 + \frac{1}{80} = 2{,}0125.$$

2.6.6. Медный кубик, ребро которого равно 5 *см*, подвергся равномерной шлифовке со всех сторон. Зная, что вес его уменьшился на 0,96 *г* и считая удельный вес меди равным 8, определить, на сколько уменьшились размеры куба, т. е. на сколько укоротилось его ребро.

Решение. Объем куба $v = x^3$, где x — ребро куба. Объем равен весу, деленному на удельный вес: $v = p/d$; изменение объема куба равно $\Delta v = 0{,}96/8 = 0{,}12$ (*см*³). Считая приближенно $\Delta v \approx dv$ и учитывая, что $dv = 3x^2\,dx$, будем иметь $0{,}12 = 3\cdot 5^2\cdot\Delta x$, откуда

$$\Delta x = \frac{0{,}12}{3\cdot 25} = 0{,}0016 \text{ см}.$$

Ребро куба укоротилось на 0,0016 *см*.

2.6.7. Получить выражения для определения абсолютных погрешностей функций через абсолютные погрешности их аргументов:

а) $y=\ln x$; б) $y=\lg x$;
в) $y=\sin x$ $(0<x<\pi/2)$; г) $y=\operatorname{tg} x$ $(0<x<\pi/2)$;
д) $y=\lg(\sin x)$ $(0<x<\pi/2)$; е) $y=\lg(\operatorname{tg} x)$ $(0<x<\pi/2)$.

Решение. Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x и абсолютная погрешность аргумента Δ_x достаточно мала, то в качестве абсолютной погрешности функции y можно принять число

$$\Delta_y=|y'_x|\,\Delta_x.$$

а) $\Delta_y=|(\ln x)'|_x\,\Delta_x=\frac{\Delta_x}{x}$, т. е. абсолютная погрешность натурального логарифма равна относительной погрешности аргумента.

б) $\Delta_y=(\lg x)'\,\Delta_x=\frac{M}{x}\,\Delta_x$, где $M=\lg e=0{,}43429$;

д) $\Delta_y=|[\lg(\sin x)]'|\,\Delta_x=M|\operatorname{ctg} x|\,\Delta_x$;

е) $\Delta_y=|[\lg(\operatorname{tg} x)]'|\,\Delta_x=\frac{2M}{|\sin 2x|}\,\Delta_x$.

Из д) и е) следует, что абсолютная погрешность $\lg\operatorname{tg} x$ всегда больше, чем абсолютная погрешность $\lg\sin x$ (для тех же x и Δ_x).

2.6.8. Найти дифференциалы dy, d^2y от функции

$$y=4x^5-7x^2+3,$$

считая, что:

1) x — независимая переменная;
2) x — функция от другой независимой переменной.

Решение. Дифференциал первого порядка dy в силу свойства инвариантности его формы записывается в обоих случаях одинаково:

$$dy=y'\,dx=(20x^4-14x)\,dx.$$

Однако в первом случае под dx понимается приращение независимой переменной Δx $(dx=\Delta x)$; во втором случае — дифференциал от x, как от функции (может быть, что $dx\neq\Delta x$).

Так как дифференциалы высших порядков не обладают свойством инвариантности, то при отыскании d^2y нам придется рассматривать два случая.

1) Пусть x — независимая переменная; тогда

$$d^2y=y''\,dx^2=(80x^3-14)\,dx^2.$$

2) Пусть x является функцией от некоторой другой переменной. В этом случае

$$d^2y=(80x^3-14)\,dx^2+(20x^4-14x)\,d^2x.$$

2.6.9. Найти дифференциалы высших порядков (x — независимая переменная):

а) $y=4^{-x^2}$; найти d^2y; б) $y=\sqrt{\ln^2 x-4}$; найти d^2y;
в) $y=\sin^2 x$; найти d^3y.

2.6.10. $y=\ln\frac{1-x^2}{1+x^2}$; найти d^2y при условии, что: а) x — независимая переменная, б) x — функция от другой переменной. Рассмотреть частный случай, когда $x=\operatorname{tg} t$.

2.6.11. Объем V шара радиуса r равен $\frac{4}{3}\pi r^3$. Найти приращение и дифференциал объема и дать им геометрическую интерпретацию.

2.6.12. Свободное падение материальной точки определяется законом $s=gt^2/2$. Найти приращение и дифференциал пути в момент t и выяснить их механический смысл.

§ 2.7. Дополнительные задачи

2.7.1. Даны функции: а) $f(x)=|x|$ и б) $\varphi(x)=|x^3|$. Существуют ли производные этих функций в точке $x=0$?

2.7.2. Показать, что кривая $y=e^{|x|}$ в точке $x=0$ не имеет касательной. Каков угол между односторонними касательными к этой кривой в указанной точке?

2.7.3. Показать, что функция

$$f(x)=|x-a|\,\varphi(x),$$

где $\varphi(x)$ — непрерывная функция и $\varphi(a)\neq 0$, не имеет производной в точке $x=a$. Чему равны односторонние производные $f'_-(a)$ и $f'_+(a)$?

2.7.4. Дана функция

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin(1/x) & \text{при } x\neq 0, \\ 0 & \text{при } x=0. \end{cases}$$

На примере этой функции показать, что производная от непрерывной функции не обязательно сама является непрерывной функцией.

2.7.5. Пусть

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{если } x\leqslant x_0, \\ ax+b, & \text{если } x>x_0. \end{cases}$$

Чему должны равняться коэффициенты a и b, чтобы функция была непрерывной и имела производную в точке x_0?

2.7.6. Из формулы $\cos 3x=\cos^3 x-3\cos x\sin^2 x$ дифференцированием вывести формулу $\sin 3x=3\cos^2 x\sin x-\sin^3 x$.

2.7.7. Из формулы для суммы геометрической прогрессии

$$1+x+x^2+\ldots+x^n=\frac{1-x^{n+1}}{1-x} \qquad (x\neq 1)$$

вывести формулы для следующих сумм:

а) $1+2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1}$;

б) $1^2+2^2x+3^2x^2+\ldots+n^2x^{n-1}$.

2.7.8. Доказать тождество

$$\cos x+\cos 3x+\ldots+\cos(2n-1)x=\frac{\sin 2nx}{2\sin x}, \qquad x\neq k\pi$$

и отсюда получить формулу для суммы

$$\sin x+3\sin 3x+\ldots+(2n-1)\sin(2n-1)x.$$

2.7.9. Найти y', если:

а) $y=f(\sin^2 x)+f(\cos^2 x)$; б) $y=f(e^x)\,e^{f(x)}$;

в) $y=\log_{\varphi(x)}\psi(x)$ $\quad(\varphi(x)>0;\ \psi(x)>0)$.