2.6.10. $y=\ln\frac{1-x^2}{1+x^2}$; найти d^2y при условии, что: а) x — независимая переменная, б) x — функция от другой переменной. Рассмотреть частный случай, когда $x=\operatorname{tg} t$.

2.6.11. Объем V шара радиуса r равен $\frac{4}{3}\pi r^3$. Найти приращение и дифференциал объема и дать им геометрическую интерпретацию.

2.6.12. Свободное падение материальной точки определяется законом $s=gt^2/2$. Найти приращение и дифференциал пути в момент t и выяснить их механический смысл.

§ 2.7. Дополнительные задачи

2.7.1. Даны функции: а) $f(x)=|x|$ и б) $\varphi(x)=|x^3|$. Существуют ли производные этих функций в точке $x=0$?

2.7.2. Показать, что кривая $y=e^{|x|}$ в точке $x=0$ не имеет касательной. Каков угол между односторонними касательными к этой кривой в указанной точке?

2.7.3. Показать, что функция

$$f(x)=|x-a|\,\varphi(x),$$

где $\varphi(x)$ — непрерывная функция и $\varphi(a)\neq 0$, не имеет производной в точке $x=a$. Чему равны односторонние производные $f'_-(a)$ и $f'_+(a)$?

2.7.4. Дана функция

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin(1/x) & \text{при} \quad x\neq 0, \\ 0 & \text{при} \quad x=0. \end{cases}$$

На примере этой функции показать, что производная от непрерывной функции не обязательно сама является непрерывной функцией.

2.7.5. Пусть

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{если} \quad x\leqslant x_0, \\ ax+b, & \text{если} \quad x>x_0. \end{cases}$$

Чему должны равняться коэффициенты a и b, чтобы функция была непрерывной и имела производную в точке x_0?

2.7.6. Из формулы $\cos 3x=\cos^3 x-3\cos x\sin^2 x$ дифференцированием вывести формулу $\sin 3x=3\cos^2 x\sin x-\sin^3 x$.

2.7.7. Из формулы для суммы геометрической прогрессии

$$1+x+x^2+\ldots+x^n=\frac{1-x^{n+1}}{1-x} \qquad (x\neq 1)$$

вывести формулы для следующих сумм:

а) $1+2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1}$;

б) $1^2+2^2x+3^2x^2+\ldots+n^2x^{n-1}$.

2.7.8. Доказать тождество

$$\cos x+\cos 3x+\ldots+\cos(2n-1)x=\frac{\sin 2nx}{2\sin x}, \qquad x\neq k\pi$$

и отсюда получить формулу для суммы

$$\sin x+3\sin 3x+\ldots+(2n-1)\sin(2n-1)x.$$

2.7.9. Найти y', если:

а) $y=f(\sin^2 x)+f(\cos^2 x)$; б) $y=f(e^x)\,e^{f(x)}$;

в) $y=\log_{\varphi(x)}\psi(x) \qquad (\varphi(x)>0;\ \psi(x)>0)$.

2.7.10. Можно ли утверждать, что произведение $F(x)=f(x)\,g(x)$ не имеет производной в точке $x=x_0$, если:

а) функция $f(x)$ имеет производную в точке x_0, а функция $\varphi(x)$ не имеет производной в этой точке;

б) обе функции $f(x)$ и $g(x)$ не имеют производной в точке x_0.

Рассмотреть примеры: 1) $f(x)=x$; $g(x)=|x|$; 2) $f(x)=|x|$, $g(x)=|x|$.

Можно ли утверждать, что сумма $F(x)=f(x)+g(x)$ не имеет производной в точке $x=x_0$, если:

в) функция $f(x)$ имеет производную в точке x_0, а функция $g(x)$ не имеет производной в этой точке.

г) Обе функции $f(x)$ и $g(x)$ не имеют производной в точке x_0?

2.7.11. Доказать, что производная четной дифференцируемой функции есть нечетная функция, а производная нечетной функции есть четная функция. Дать геометрическое объяснение этим фактам.

2.7.12. Доказать, что производная периодической функции с периодом T есть периодическая функция с периодом T.

2.7.13. Найти $F'(x)$, если

$$F(x)=\begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix}.$$

2.7.14. Найти производную функции $y=x\,|x|$. Построить графики функции и ее производной.

2.7.15. Пусть имеем сложную функцию $y=f(u)$, где $u=\varphi(x)$. Среди каких точек нужно искать точки, в которых сложная функция может не иметь производной? Обязательно ли в этих точках сложная функция не имеет производной? Рассмотреть функцию $y=u^2$, $u=|x|$.

2.7.16. Найти y'' для следующих функций:

а) $y=|x^3|$; б) $y=\begin{cases} x^2\sin(1/x), & x\neq 0, \\ 0 \text{ при } x=0. \end{cases}$

Существует ли $y''(0)$?

2.7.17. а) $f(x)=x^n$; показать, что

$$f(1)+\frac{f'(1)}{1!}+\frac{f^{(2)}(1)}{2!}+\ldots+\frac{f^{(n)}(1)}{n!}=2^n.$$

б) $f(x)=x^{n-1}e^{1/x}$; показать, что

$$[f(x)]^{(n)}=(-1)^n\frac{f(x)}{x^{2n}} \qquad (n=1,\ 2,\ \ldots).$$

2.7.18. $y=x^2e^{-x/a}$; показать, что

$$f^{(n)}(0)=\frac{(-1)^n n(n-1)}{a^{n-2}} \qquad (n\geqslant 2).$$

2.7.19. Показать, что функция $y=\arcsin x$ удовлетворяет соотношению $(1-x^2)\,y''=xy'$. Применяя к обеим частям этого тождества формулу Лейбница, найти $y^{(n)}(0)$ $(n\geqslant 2)$.

2.7.20. Доказать, что полиномы Чебышева

$$T_n(x)=\frac{1}{2^{n-1}}\cos(n\arccos x) \qquad (n=1,\ 2,\ \ldots)$$

удовлетворяют уравнению

$$(1-x^2)\,T_n''(x)-xT_n'(x)+n^2T_n(x)=0.$$

2.7.21. Производная n-го порядка от функции e^{-x^2} имеет вид

$$(e^{-x^2})^{(n)}=e^{-x^2}H_n(x),$$

где $H_n(x)$ — многочлен степени n, называемый *многочленом Чебышева—Эрмита.*

Доказать справедливость следующего рекуррентного соотношения:

$$H_{n+1}(x)-2xH_n(x)+2nH_{n-1}(x)=0 \qquad (n=1,\ 2,\ \ldots).$$

2.7.22. Показать, что существует однозначная функция $y=y(x)$, определяемая уравнением $y^3+3y=x$, и найти ее производную y'_x.

2.7.23. Выделить однозначные непрерывные ветви обратной функции $x=x(y)$ и найти их производные, если $y=2x^2-x^4$.

2.7.24. $u=\frac{1}{2}\ln\frac{1+v}{1-v}$; проверить соотношение $\frac{du}{dv}\frac{dv}{du}=1$.

2.7.25. Обратные тригонометрические функции непрерывны во всех точках области существования. Во всех ли точках этой области обратные тригонометрические функции имеют конечную производную? Указать точки, в которых следующие функции не имеют конечной производной:

а) $y=\arccos\frac{x+1}{2}$, б) $y=\arcsin\frac{1}{x}$.

2.7.26. Показать, что функция $y=y(x)$, определяемая параметрически $x=2t-|t|$, $y=t^2+t|t|$, дифференцируема при $t=0$, однако ее производная не может быть найдена по обычной формуле.

2.7.27. В уравнении параболы $y=ax^2+bx+c$ определить параметры a, b, c так, чтобы она касалась прямой $y=x$ в точке $x=1$ и проходила через точку $(-1,\ 0)$.

2.7.28. Доказать, что кривые $y_1=f(x)$ $(f(x)>0)$ и $y_2=f(x)\sin ax$, где $f(x)$ — дифференцируемая функция, касаются друг друга в общих точках.

2.7.29. Показать, что для любой точки $M(x_0,\ y_0)$ равнобочной гиперболы $x^2-y^2=a^2$ отрезок нормали от точки M до точки пересечения с осью абсцисс равен радиусу-вектору точки M.

2.7.30. Показать, что при любом положении производящего круга касательная и нормаль к циклоиде

$$x=a(t-\sin t), \qquad y=a(1-\cos t)$$

проходят соответственно через высшую $(at,\ 2a)$ и низшую $(at,\ 0)$ точки окружности.

2.7.31. Показать, что две кардиоиды $\rho=a(1+\cos\varphi)$ и $\rho=a(1-\cos\varphi)$ пересекаются под прямым углом.

2.7.32. Пусть $y=f(u)$, где $u=\varphi(x)$. Доказать справедливость равенства

$$d^3y=f'''(u)\,du^3+3f''(u)\,du\,d^2u+f'(u)\,d^3u.$$

2.7.33. Пусть $y=f(x)$, где $x=\varphi(t)$; функции $f(x)$ и $\varphi(t)$ дважды дифференцируемы и $dx\neq 0$. Доказать, что

$$y''_{xx}=\frac{d^2y\,dx-dy\,d^2x}{dx^3},$$

где дифференциалы, фигурирующие справа, являются дифференциалами по переменной t.

2.7.34. Как преобразуется выражение

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+y,$$

где y — дважды дифференцируемая функция от x, если ввести новую независимую переменную t, положив $x=\cos t$?

2.7.35. При определении силы тока посредством тангенс-гальванометра пользуются формулой

$$I=k\,\mathrm{tg}\,\varphi,$$

где I — сила тока, k — коэффициент пропорциональности (зависящий от прибора), φ — угол отклонения стрелки. Определить относительную ошибку результата, зависящую от неточности в отсчете угла φ. При каком положении стрелки результаты получаются наиболее надежными?