Глава III

Применение дифференциального исчисления к исследованию функций

§ 3.1. Основные теоремы о дифференцируемых функциях

Теорема Ферма́. Пусть функция $y=f(x)$ определена на некотором промежутке и во внутренней точке x_0 этого промежутка имеет наибольшее или наименьшее значение.

Если в точке x_0 существует производная $f'(x_0)$, то $f'(x_0)=0$.

Теорема Ролля. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, имеет конечную производную в каждой внутренней точке этого отрезка и $f(a)=f(b)$, то существует такая точка $\xi \in (a, b)$, что $f'(\xi)=0$.

Теорема Лагранжа. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и имеет конечную производную в каждой внутренней точке этого отрезка, то существует такая точка $\xi \in (a, b)$, что

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(\xi).$$

Признак постоянства функции. Если во всех точках некоторого промежутка $f'(x)=0$, то функция $f(x)$ в этом промежутке сохраняет постоянное значение.

Теорема Коши. Пусть функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$ и имеют конечные производные в каждой внутренней точке этого отрезка. Если эти производные не обращаются в нуль одновременно и $\varphi(a) \neq \varphi(b)$, то существует такая точка $\xi \in (a, b)$, что

$$\frac{\psi(b)-\psi(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{\psi'(\xi)}{\varphi'(\xi)}.$$

3.1.1. Удовлетворяет ли функция $f(x)=3x^2-1$ условиям теоремы Ферма на отрезке $[1, 2]$?

Решение. Заданная функция не удовлетворяет условию теоремы Ферма́, так как она монотонно возрастает на отрезке $[1, 2]$ и, следовательно, принимает наименьшее значение при $x=1$ и наибольшее значение при $x=2$, т. е. не во внутренних точках отрезка $[1, 2]$. Поэтому теорема Ферма неприменима; другими словами, нельзя утверждать, что $f'(1)=f'(2)=0$. В самом деле, $f'(1)=6$, $f'(2)=12$.

3.1.2. Удовлетворяют ли условиям теоремы Ролля: а) функция $f(x)=1-\sqrt[3]{x^2}$ на отрезке $[-1, 1]$? б) функция $f(x)=\ln\sin x$ на отрезке $[\pi/6, 5\pi/6]$? в) $f(x)=1-|x|$ на отрезке $[-1, 1]$? Если нет, то почему?

Решение. а) Функция непрерывна на отрезке $[-1, 1]$, кроме того, $f(-1)=f(1)=0$. Значит, два условия теоремы Ролля выполнены. Производная $f'(x)=-2/(3\sqrt[3]{x})$ существует во всех точках, кроме точки $x=0$. Так как эта точка внутренняя, то третье условие теоремы Ролля не выполнено. Поэтому теорема Ролля к данной функции неприменима. И действительно, $f'(x)\neq 0$ на $[-1, 1]$.

3.1.3. Доказать, что уравнение

$$3x^5+15x-8=0$$

имеет только один действительный корень.

Решение. Существование хотя бы одного действительного корня следует из того, что многочлен $f(x)=3x^5+15x-8$ — нечетной степени. Единственность такого корня докажем от противного. Предположим, что существуют два корня $x_1<x_2$. Тогда на отрезке $[x_1, x_2]$ функция $f(x)=3x^5+15x-8$ удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля: она непрерывна, обращается на концах в нуль и в каждой точке имеет производную. Следовательно, в некоторой точке ξ, $x_1<\xi<x_2$, $f'(\xi)=0$. Однако $f'(x)=15(x^4+1)>0$. Полученное противоречие доказывает, что заданное уравнение имеет лишь один действительный корень.

3.1.4. Удовлетворяет ли функция $f(x)=3x^2-5$ условиям теоремы Лагранжа на отрезке $[-2, 0]$? Если да, то найти фигурирующую в формуле Лагранжа $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$ точку ξ.

Решение. Функция удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа, так как она непрерывна на отрезке $[-2, 0]$ и имеет конечную производную в каждой внутренней точке отрезка. Точку ξ найдем из формулы Лагранжа:

$$f'(\xi)=6\xi=\frac{f(0)-f(-2)}{0-(-2)}=\frac{-5-7}{2}=-6,$$

откуда $\xi=-1$.

3.1.5. Применить формулу Лагранжа к функции $f(x)=\ln x$ на отрезке $[1, e]$ и найти соответствующее значение ξ.

3.1.6. Проверить, что функции $f(x)=x^2-2x+3$ и $g(x)=x^3-$ $-7x^2+20x-5$ удовлетворяют условиям теоремы Коши на отрезке $[1, 4]$ и найти соответствующее значение ξ.

Решение. Данные функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны везде, а следовательно, и на отрезке $[1, 4]$; их производные $f'(x)=2x-2$ и $g'(x)=3x^2-14x+20$ конечны везде; кроме того, $g'(x)$ не обращается в нуль ни при одном действительном значении x.

Таким образом, формула Коши к заданным функциям применима:

$$\frac{f(4)-f(1)}{g(4)-g(1)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},$$

т. е.

$$\frac{11-2}{27-9}=\frac{2\xi-2}{3\xi^2-14\xi+20}\qquad(1<\xi<4).$$

Решая последнее уравнение, находим два значения ξ: $\xi_1=2$ и $\xi_2=4$.

Из этих двух значений только $\xi_1=2$ является внутренней точкой.

3.1.7. Удовлетворяют ли функции

$$f(x)=e^x \quad \text{и} \quad g(x)=\frac{x^2}{1+x^2}$$

условиям теоремы Коши на отрезке $[-3, 3]$?

3.1.8. На кривой $y=x^3$ найти точку, в которой касательная параллельна хорде, соединяющей точки $A(-1, -1)$ и $B(2, 8)$.

Решение. Функция $y=x^3$ на отрезке $[-1, 2]$, концами которого являются абсциссы точек A и B, непрерывна и имеет конечную производную, поэтому к ней применима теорема Лагранжа. Согласно этой теореме на дуге AB найдется по меньшей мере одна точка M, в которой касательная параллельна хорде AB. Напишем формулу Лагранжа применительно к заданной функции:

$$f(2)-f(-1)=f'(\xi)[2-(-1)],$$

или

$$8+1=3\xi^2\cdot 3;$$

отсюда

$$\xi_1=-1, \quad \xi_2=1.$$

Найденные значения ξ и являются абсциссами искомых точек (их оказалось две). Подставляя ξ_1 и ξ_2 в уравнение кривой, найдем соответствующие ординаты:

$$y_1=\xi_1^3=1; \qquad y_2=\xi_2^3=-1.$$

Таким образом, искомыми точками являются $M_1(1, 1)$; $M_2(-1, -1)$. Из них только точка $M_1(1, 1)$ является внутренней точкой дуги AB.

Замечание. Эту задачу можно решить и не прибегая к теореме Лагранжа; нужно составить уравнение хорды как прямой, проходящей через две заданные точки, а затем найти на кривой точку, в которой касательная параллельна хорде.

3.1.9. Пользуясь признаком постоянства функции, вывести следующие формулы, известные из элементарной математики:

а) $\arcsin x+\arccos x=\pi/2$; б) $\sin^2 x=(1-\cos 2x)/2$;

в) $\arccos\dfrac{1-x^2}{1+x^2}=2\,\mathrm{arctg}\,x$ при $0\leqslant x<\infty$;

г) $$\arcsin\frac{2x}{1+x^2}=\begin{cases}\pi-2\,\mathrm{arctg}\,x & \text{при } x\geqslant 1,\\ 2\,\mathrm{arctg}\,x & \text{при } -1\leqslant x\leqslant 1,\\ -\pi-2\,\mathrm{arctg}\,x & \text{при } x\leqslant -1.\end{cases}$$

Решение. а) Введем в рассмотрение функцию

$$f(x)=\arcsin x+\arccos x,$$

определенную на отрезке $[-1, 1]$. Производная указанной функции внутри этого отрезка равна нулю:

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\equiv 0 \qquad (-1<x<1).$$

На основании признака постоянства функции $f(x)=\text{const}$, т. е.

$$\arcsin x+\arccos x=C \qquad (-1<x<1).$$

Чтобы определить постоянную C, положим, например, $x=0$, получим $\pi/2=C$. Отсюда

$$\arcsin x+\arccos x=\pi/2 \qquad (-1<x<1).$$

Справедливость этого равенства в точках $x=\pm 1$ проверяется непосредственно.

б) Введем в рассмотрение функцию

$$f(x)=\sin^2 x+\frac{1}{2}\cos 2x,$$

определенную на всей числовой прямой: $-\infty<x<\infty$. Производная этой функции всюду равна нулю:

$$f'(x)=2\sin x\cos x-\sin 2x\equiv 0.$$

На основании признака постоянства функции

$$\sin^2 x+\frac{1}{2}\cos 2x=C.$$

Для определения C положим, например, $x=0$; тогда получим $1/2=C$. Отсюда

$$\sin^2 x+\frac{1}{2}\cos 2x=\frac{1}{2},$$

или

$$\sin^3 x=\frac{1-\cos 2x}{2}.$$

в) Введем в рассмотрение функцию

$$f(x)=\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}-2\,\mathrm{arctg}\,x,$$

определенную на всей числовой прямой, так как $\left|\frac{1-x^2}{1+x^2}\right|\leqslant 1$.

Производная функции $f(x)$ равна нулю при всех $x>0$:

$$f'(x)=-\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}}\,\frac{-4x}{(1+x^2)^2}-\frac{2}{1+x^2}=\frac{4x}{2x(1+x^2)}-\frac{2}{1+x^2}\equiv 0.$$

На основании признака постоянства функции

$$\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}-2\,\mathrm{arctg}\,x=C \quad \text{при } x>0.$$

Для определения C положим, например, $x=1$, что дает $C=\arccos 0-2\,\mathrm{arctg}\,1=0$.

Справедливость доказанной формулы при $x=0$ проверяется непосредственно.

Замечание. При $x=0$ производная функции $\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}$ не существует. При $x<0$ производная от нее равна

$$\left(\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)'=-\frac{2}{1+x^2},$$

что позволяет получить формулу

$$\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}=-2\operatorname{arctg} x \qquad (x<0).$$

Последнюю формулу можно также получить на том основании, что $\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}$ — четная функция, а $2\operatorname{arctg} x$ — нечетная функция.

3.1.10. Известно, что $(e^x)'=e^x$ для всех x. Существуют ли еще какие-нибудь функции, совпадающие со своими производными всюду?

Решение. Пусть функция $f(x)$ такова, что $f'(x)=f(x)$ всюду. Введем в рассмотрение функцию

$$\varphi(x)=\frac{f(x)}{e^x}=f(x)e^{-x}.$$

Производная этой функции равна нулю всюду:

$$\varphi'(x)=f'(x)e^{-x}-e^{-x}f(x)\equiv 0.$$

На основании признака постоянства функции $f(x)/e^x=C$. Отсюда $f(x)=Ce^x$.

Итак, мы доказали, что класс функций, для которых $f'(x)=f(x)$, исчерпывается формулой $f(x)=Ce^x$.

3.1.11. Доказать неравенство

$$\operatorname{arctg} x_2-\operatorname{arctg} x_1<x_2-x_1,$$

где $x_2>x_1$.

Решение. К функции $f(x)=\operatorname{arctg} x$ на отрезке $[x_1, x_2]$ применим формулу Лагранжа:

$$\operatorname{arctg} x_2-\operatorname{arctg} x_1=\frac{1}{1+\xi^2}(x_2-x_1),$$

где $x_1<\xi<x_2$.

Так как

$$0<\frac{1}{1+\xi^2}<1 \text{ и } x_2-x_1>0,$$

то

$$\operatorname{arctg} x_2-\operatorname{arctg} x_1<x_2-x_1.$$

В частности, положив $x_1=0$ и $x_2=x$, получим

$$\operatorname{arctg} x<x \qquad (x>0).$$

3.1.12. Показать, что корни квадратные из двух последовательных натуральных чисел, бо́льших N^2, отличаются между собой менее, чем на $1/(2N)$.

Решение. К функции $f(x)=\sqrt{x}$ на отрезке $[n, n+1]$ применим формулу Лагранжа:

$$f(n+1)-f(n)=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{1}{2\sqrt{\xi}}, \quad \text{где} \quad n<\xi<n+1.$$

Если $n>N^2$, то и $\xi>N^2$, следовательно, $1/(2\sqrt{\xi})<1/(2N)$, откуда

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}<1/(2N).$$

3.1.13. Используя теорему Ролля, доказать, что производная $f'(x)$ функции

$$f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{\pi}{x} & \text{при} \quad x>0, \\ 0 & \text{при} \quad x=0, \end{cases}$$

обращается в нуль на бесконечном множестве точек промежутка $(0, 1)$.

Решение. Функция $f(x)$ обращается в нуль в точках, где

$$\sin(\pi/x)=0, \quad \pi/x=k\pi, \quad x=1/k, \qquad k=1, 2, 3, \ldots$$

Так как функция $f(x)$ во всякой внутренней точке отрезка $[0, 1]$ имеет производную, то к любому из отрезков $[1/2, 1]$, $[1/3, 1/2]$, ..., $[1/(k+1), 1/k]$, ... можно применить теорему Ролля. Следовательно, внутри каждого из отрезков последовательности имеется точка ξ_k, $1/(k+1)<\xi_k<1/k$, в которой производная $f'(\xi_k)=0$. Тем самым мы показали, что производная обращается в нуль на бесконечном множестве точек (рис. 38).

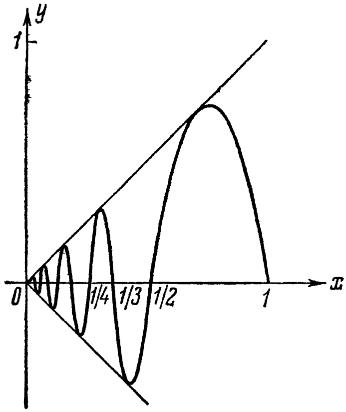

Рис. 38.

3.1.14. *Полиномом Лежандра* называется полином, который определяется следующей формулой (формулой Родрига):

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\cdot\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$

$$(n=0, 1, 2, \ldots).$$

Пользуясь теоремой Ролля, доказать, что полином Лежандра $P_n(x)$ имеет n различных действительных корней, которые все содержатся между -1 и $+1$.

Решение. Рассмотрим функцию

$$f(x)=(x^2-1)^n=(x-1)^n(x+1)^n.$$

Эта функция и ее $n-1$ последовательных производных обращаются в нуль в точках $x=\pm 1$ (применить формулу Лейбница для высших производных от произведения двух функций).

Из того, что $f(1)=f(-1)=0$, следует, что найдется внутри отрезка $[-1, 1]$ точка ξ_1, в которой $f'(\xi_1)=0$, т. е. $x=\xi_1$ будет корнем первой производной. Теперь к функции $f'(x)$ снова применяем теорему Ролля на отрезках $[-1, \xi_1]$, $[\xi_1, 1]$. Получим, что функция $f''(x)$, помимо $+1$ и -1, на отрезке $[-1, 1]$ имеет еще два корня. Повторяя только что проведенные рассуждения, установим, что $(n-1)$-я производная, помимо $+1$ и -1, имеет на отрезке $[-1, 1]$ еще $n-1$ корень, т. е. всего у функции $f^{(n-1)}(x)$ на отрезке $[-1, 1]$ имеется $n+1$ корней, которые разбивают этот отрезок на n частей. Применяя еще раз теорему Ролля, убеждаемся в том, что функция $f^{(n)}(x)$, а, значит, и функция $P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}f^{(n)}(x)$, имеет n различных корней на отрезке $[-1, 1]$.

3.1.15. Проверить, применима ли формула Лагранжа к функциям:

а) $f(x)=x^2$ на отрезке $[3, 4]$;

б) $f(x)=\ln x$ на отрезке $[1, 3]$;

в) $f(x)=4x^3-5x^2+x-2$ на отрезке $[0, 1]$;

г) $f(x)=\sqrt[5]{x^4(x-1)}$ на отрезке $[-1/2, 1/2]$.

В случае применимости найти значения ξ, фигурирующие в этой формуле.

3.1.16. Пользуясь теоремой Лагранжа, оценить значение $\ln(1+e)$.

3.1.17. Пользуясь формулой Лагранжа, доказать неравенство

$$\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x \quad \text{при } x>0.$$

§ 3.2. Раскрытие неопределенностей. Правило Лопиталя

I. Неопределенности вида $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в некоторой окрестности точки a, за исключением, быть может, самой точки a, причем $g'(x)\neq 0$, и если

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)=0 \quad \text{или} \quad \lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)=\infty,$$

то

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

при условии, что предел $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ существует (*правило Лопиталя*). Точка a может быть как конечной, так и несобственной точкой $+\infty$ или $-\infty$.

II. Неопределенности вида $0\cdot\infty$ или $\infty-\infty$ приводятся к неопределенностям вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$ алгебраическими преобразованиями.

III. Неопределенности вида 1^∞, ∞^0 или 0^0 сводятся к неопределенности вида $0\cdot\infty$ с помощью предварительного логарифмирования или преобразования $[f(x)]^{\varphi(x)}=e^{\varphi(x)\ln f(x)}$.