Из того, что $f(1)=f(-1)=0$, следует, что найдется внутри отрезка $[-1, 1]$ точка ξ_1, в которой $f'(\xi_1)=0$, т. е. $x=\xi_1$ будет корнем первой производной. Теперь к функции $f'(x)$ снова применяем теорему Ролля на отрезках $[-1, \xi_1]$, $[\xi_1, 1]$. Получим, что функция $f''(x)$, помимо $+1$ и -1, на отрезке $[-1, 1]$ имеет еще два корня. Повторяя только что проведенные рассуждения, установим, что $(n-1)$-я производная, помимо $+1$ и -1, имеет на отрезке $[-1, 1]$ еще $n-1$ корень, т. е. всего у функции $f^{(n-1)}(x)$ на отрезке $[-1, 1]$ имеется $n+1$ корней, которые разбивают этот отрезок на n частей. Применяя еще раз теорему Ролля, убеждаемся в том, что функция $f^{(n)}(x)$, а, значит, и функция $P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}f^{(n)}(x)$, имеет n различных корней на отрезке $[-1, 1]$.

3.1.15. Проверить, применима ли формула Лагранжа к функциям:

а) $f(x)=x^2$ на отрезке $[3, 4]$;

б) $f(x)=\ln x$ на отрезке $[1, 3]$;

в) $f(x)=4x^3-5x^2+x-2$ на отрезке $[0, 1]$;

г) $f(x)=\sqrt[5]{x^4(x-1)}$ на отрезке $[-1/2, 1/2]$.

В случае применимости найти значения ξ, фигурирующие в этой формуле.

3.1.16. Пользуясь теоремой Лагранжа, оценить значение $\ln(1+e)$.

3.1.17. Пользуясь формулой Лагранжа, доказать неравенство

$$\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x \quad \text{при } x>0.$$

§ 3.2. Раскрытие неопределенностей. Правило Лопиталя

I. Неопределенности вида $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в некоторой окрестности точки a, за исключением, быть может, самой точки a, причем $g'(x)\neq 0$, и если

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)=0 \quad \text{или} \quad \lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)=\infty,$$

то

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

при условии, что предел $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ существует (*правило Лопиталя*). Точка a может быть как конечной, так и несобственной точкой $+\infty$ или $-\infty$.

II. Неопределенности вида $0\cdot\infty$ или $\infty-\infty$ приводятся к неопределенностям вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$ алгебраическими преобразованиями.

III. Неопределенности вида 1^∞, ∞^0 или 0^0 сводятся к неопределенности вида $0\cdot\infty$ с помощью предварительного логарифмирования или преобразования $[f(x)]^{\varphi(x)}=e^{\varphi(x)\ln f(x)}$.

3.2.1. Применяя правило Лопиталя, найти пределы функций:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-e^{-2ax}}{\ln(1+x)}$; б) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt[3]{1+2x}+1}{\sqrt{2+x}+x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{\cos 3x-e^{-x}}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x^2}{\ln\cos(2x^2-x)}$; е) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{e^{1/x^2}-1}{2\operatorname{arctg} x^2-\pi}$.

Решение. а) Здесь обе функции $f(x)=e^{ax}-e^{-2ax}$ и $g(x)=\ln(1+x)$ — бесконечно малые в окрестности нуля, так как

$$\lim_{x\to 0} f(x)=1-1=0; \qquad \lim_{x\to 0} g(x)=\ln 1=0.$$

Далее $f'(x)$ и $g'(x)$ существуют во всякой окрестности точки $x=0$, не содержащей точки $x=-1$, причем

$$g'(x)=\frac{1}{1+x}\neq 0 \qquad (x>-1).$$

Наконец, существует предел отношения производных:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{ae^{ax}+2ae^{-2ax}}{1/(1+x)}=3a.$$

Поэтому применимо правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-e^{-2ax}}{\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{ae^{ax}+2ae^{-2ax}}{1/(1+x)}=3a. \qquad (*)$$

Замечание. Вычисление предела отношения по правилу Лопиталя обычно записывают сразу так, как это сделано в (*). В существовании нужных производных и пределов убеждаются в самом ходе вычислений. Если при этом отношение производных $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ снова представляет собой неопределенность, то правило Лопиталя применяют повторно, пока не устранится неопределенность или обнаружится, что нужные пределы не существуют. Поэтому в дальнейшем приводится только запись необходимых преобразований (а проверка выполнения условий их применимости предоставляется читателю).

б) $$\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt[3]{1+2x}+1}{\sqrt{2+x}+x}=\lim_{x\to -1}\frac{2/\left(3\sqrt[3]{(1+2x)^2}\right)}{1/(2\sqrt{2+x})+1}=\frac{4}{9};$$

д) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x^2}{\ln\cos(2x^2-x)}=\lim_{x\to 0}\frac{-6x\cos 3x^2\cos(2x^2-x)}{(4x-1)\sin(2x^2-x)}=$$
$$=-6\lim_{x\to 0}\frac{\cos 3x^2\cos(2x^2-x)}{4x-1}\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin(2x^2-x)}.$$

Предел первого сомножителя вычисляется непосредственно, а предел второго сомножителя, представляющего собой неопределенность вида

$\frac{0}{0}$, находим с помощью правила Лопиталя:

$$-6\lim_{x\to 0}\frac{\cos 3x^2\cos(2x^2-x)}{4x-1}\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin(2x^2-x)}=$$

$$=-6\cdot\frac{1\cdot 1}{-1}\lim_{x\to 0}\frac{1}{(4x-1)\cos(2x^2-x)}=6\cdot\frac{1}{-1\cdot 1}=-6.$$

3.2.2. Известно, что при $x\to+\infty$ функции $x^k\,(k>0)$; $\log_a x$; $a^x\,(a>1)$ являются бесконечно большими величинами. Пользуясь правилом Лопиталя, сравнить эти величины между собой.

Решение. а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\log_a x}{x^k}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}\log_a e}{kx^{k-1}}=\log_a e\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{kx^k}=0;$

б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^m}{a^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{mx^{m-1}}{a^x\ln a}=\ldots=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{m!}{a^x(\ln a)^m}=0.$

Следовательно, степенная функция $x^k\,(k>0)$ растет быстрее, чем логарифмическая функция $\log_a x\,(a>1)$, а показательная функция a^x с основанием, бо́льшим единицы, растет быстрее, чем степенна́я функция x^m.

3.2.3. Найти пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg}x-\frac{1}{x}\right)$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$.

Решение. а) Имеем неопределенность вида $\infty-\infty$. Приведем эту неопределенность к неопределенности вида $\frac{0}{0}$, а затем применим правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}=\lim_{x\to 1}\frac{1-1/x}{\ln x+1-1/x}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x\ln x+x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\ln x+2}=\frac{1}{2}.$$

3.2.4. Найти пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}x^n\ln x\ (n>0)$; б) $\lim\limits_{x\to 0}[\ln(1+\sin^2 x)\operatorname{ctg}\ln^2(1+x)]$.

Решение. а) Имеем неопределенность вида $0\cdot\infty$.

Преобразуем к неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$, после чего применим правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0}x^n\ln x=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{x^{-n}}=\lim_{x\to 0}\frac{1/x}{-nx^{-n-1}}=-\frac{1}{n}\lim_{x\to 0}x^n=0,\ \text{так как } n>0.$$

б) Имеем неопределенность вида $0\cdot\infty$:

$$\lim_{x\to 0}\left[\ln(1+\sin^2 x)\operatorname{ctg}\ln^2(1+x)\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin^2 x)}{\operatorname{tg}\ln^2(1+x)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+\sin^2 x}\sin 2x}{2\left\{1+\operatorname{tg}^2[\ln^2(1+x)]\right\}\ln(1+x)\cdot\frac{1}{1+x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1/(1+x)}=1.$$

3.2.5. Найти пределы:

$$\text{а) }\lim_{x\to+0}(1/x)^{\sin x};\qquad \text{б) }\lim_{x\to+0}x^{1/\ln(e^x-1)}.$$

Решение. а) Имеем неопределенность вида ∞^0. Пусть $y=(1/x)^{\sin x}$; тогда

$$\ln y=\sin x\ln(1/x),$$

$$\lim_{x\to+0}\ln y=\lim_{x\to+0}\sin x\ln(1/x)\ \text{(неопределенность вида } 0\cdot\infty).$$

Преобразуем к неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$ и применим правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to+0}\ln y=\lim_{x\to+0}\frac{-\ln x}{1/\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{-1/x}{-(\cos x)/\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x\cos x}=0.$$

Следовательно, $\lim\limits_{x\to+0}y=e^0=1$.

3.2.6. Найти пределы:

$$\text{а) }\lim_{x\to\pi/2}(\sin x)^{\operatorname{tg}x};\qquad \text{б) }\lim_{x\to 0}x^x.$$

3.2.7. Вычислить

$$\lim_{x\to+\pi/2-0}(\operatorname{tg}x)^{\operatorname{ctg}x}.$$

Решение. Воспользуемся тождеством

$$(\operatorname{tg}x)^{\operatorname{ctg}x}=e^{\operatorname{ctg}x\ln\operatorname{tg}x},$$

но

$$\lim_{x\to+\pi/2-0}\operatorname{ctg}x\ln\operatorname{tg}x=\lim_{x\to+\pi/2-0}\frac{\ln\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}x}=\lim_{y=\operatorname{tg}x\to+\infty}\frac{\ln y}{y}=0.$$

Отсюда

$$\lim_{x\to+\pi/2-0}(\operatorname{tg}x)^{\operatorname{ctg}x}=e^0=1.$$

3.2.8. Установить, существуют ли нижеследующие пределы, применимо ли к их вычислению правило Лопиталя и приводит ли к правильному ответу его формальное применение:

$$\text{а) }\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin(1/x)}{\sin x};\qquad \text{б) }\lim_{x\to\infty}\frac{2+2x+\sin 2x}{(2x+\sin 2x)e^{\sin x}};\qquad \text{в) }\lim_{x\to\pi/2}\frac{\operatorname{tg}x}{\sec x}.$$

Решение. а) Предел существует и равен 0. В самом деле,

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin(1/x)}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=1\cdot 0=0.$$

Предел же отношения производных не существует. Действительно,

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin(1/x)-\cos(1/x)}{\cos x}=0-\lim_{x\to 0}\cos\frac{1}{x},$$

но $\lim\limits_{x\to 0}\cos(1/x)$ не существует, следовательно, правило Лопиталя здесь неприменимо.

б) Предел отношения функций не существует:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2+2x+\sin 2x}{(2x+\sin 2x)e^{\sin x}}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{2x+\sin 2x}\right)e^{-\sin x},$$

но $\lim\limits_{x\to\infty}e^{-\sin x}$ не существует, так как функция $e^{-\sin x}$ при $x\to\infty$ пробегает бесчисленное множество раз значения от $1/e$ до e.

Покажем, что предел отношения производных существует:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2+2\cos 2x}{[2+2\cos 2x+(2x+\sin 2x)\cos x]e^{\sin x}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4\cos^2 x}{4\cos^2 x+(2x+\sin 2x)\cos x}e^{-\sin x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4\cos x}{2x+4\cos x+\sin 2x}e^{-\sin x}=0,$$

так как функция $e^{-\sin x}$ — ограничена, а $\dfrac{4\cos x}{2x+4\cos x+\sin 2x}\xrightarrow[x\to\infty]{}0$.

Здесь мы сократили числитель и знаменатель на $\cos x$, который обращается в нуль для бесконечного множества значений x. Именно наличие этого множителя, обращающего одновременно в нуль производные сравниваемых функций, приводит к неприменимости в этом случае правила Лопиталя.

в) $$\lim_{x\to\pi/2}\frac{\operatorname{tg} x}{\sec x}=\lim_{x\to\pi/2}\frac{\sec^2 x}{\sec x\operatorname{tg} x}=\lim_{x\to\pi/2}\frac{\sec x}{\operatorname{tg} x}=\lim_{x\to\pi/2}\frac{\operatorname{tg} x}{\sec x}=\ldots$$

Здесь применение правила Лопиталя не приводит к цели, хотя предел существует:

$$\lim_{x\to\pi/2}\frac{\operatorname{tg} x}{\sec x}=\lim_{x\to\pi/2}\frac{\sin x\cos x}{\cos x}=\lim_{x\to\pi/2}\sin x=1.$$

3.2.9. Применяя правило Лопиталя, найти пределы функций:

а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln(x^2-3)}{x^2+3x-10}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{a^{\ln x}-x}{\ln x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-x}{x-\sin x}$; г) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-4\sin^2(\pi x/6)}{1-x^2}$;

д) $\lim\limits_{x\to a}\arcsin\frac{x-a}{a}\operatorname{ctg}(x-a)$; е) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\pi-2\operatorname{arctg} x)\ln x$;

ж) $\lim\limits_{x\to+0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x}$; з) $\lim\limits_{x\to\infty}(a^{1/x}-1)\,x \quad (a>0)$;

и) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos mx)^{n/x^2}$; к) $\lim\limits_{x\to a}\left(2-\frac{x}{a}\right)^{\operatorname{tg}(\pi x/(2a))}$;

л) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{x}{\ln x}\right)$; м) $\lim\limits_{x\to 0}x^{1/\ln(e^x-1)}$;

н) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\operatorname{ctg}^2 x\right)$; о) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$;

п) $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\left[\operatorname{ch}\frac{a}{x}-1\right]$; р) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{5}{2+\sqrt{9+x}}\right)^{1/\sin x}$;

с) $\lim\limits_{x\to+0}(\ln\operatorname{ctg} x)^{\operatorname{tg} x}$; т) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^{1/x^2}-1}{2\operatorname{arctg} x^2-\pi}$.

§ 3.3. Формула Тейлора. Приложение к приближенным вычислениям

Если функция $f(x)$ непрерывна и имеет на отрезке $[a, b]$ непрерывные производные до $(n-1)$-го порядка включительно, а в каждой внутренней точке отрезка имеет конечную производную n-го порядка, то при $x\in[a, b]$ справедлива следующая *формула Тейлора*:

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!}+f'''(a)\frac{(x-a)^3}{3!}+\ldots$$
$$\ldots+f^{(n-1)}(a)\frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}+f^{(n)}(\xi)\frac{(x-a)^n}{n!},$$

где $\xi=a+\theta(x-a)$ и $0<\theta<1$.

Если положить в этой формуле $a=0$, то получим *формулу Маклорена*:

$$f(x)=f(0)+f'(0)\,x+f''(0)\frac{x^2}{2!}+\ldots+f^{(n-1)}(0)\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+f^{(n)}(\xi)\frac{x^n}{n!},$$

где $\xi=\theta x$, $0<\theta<1$.

Последний член в формуле Тейлора называется *остаточным членом формулы Тейлора в форме Лагранжа* и обозначается $R_n(x)$:

$$R_n(x)=\frac{f^{(n)}[a+\theta(x-a)]}{n!}(x-a)^n;$$

соответственно остаточный член в формуле Маклорена имеет вид

$$R_n(x)=\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n.$$

3.3.1. Разложить многочлен $P(x)=x^5-2x^4+x^3-x^2+2x-1$ по степеням двучлена $x-1$, пользуясь формулой Тейлора.