в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-x}{x-\sin x}$; г) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-4\sin^2(\pi x/6)}{1-x^2}$;

д) $\lim\limits_{x\to a}\arcsin\frac{x-a}{a}\operatorname{ctg}(x-a)$; е) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\pi-2\operatorname{arctg} x)\ln x$;

ж) $\lim\limits_{x\to+0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x}$; з) $\lim\limits_{x\to\infty}(a^{1/x}-1)\,x$ $(a>0)$;

и) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos mx)^{n/x^2}$; к) $\lim\limits_{x\to a}\left(2-\frac{x}{a}\right)^{\operatorname{tg}(\pi x/(2a))}$;

л) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{x}{\ln x}\right)$; м) $\lim\limits_{x\to 0}x^{1/\ln(e^x-1)}$;

н) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\operatorname{ctg}^2 x\right)$; о) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$;

п) $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\left[\operatorname{ch}\frac{a}{x}-1\right]$; р) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{5}{2+\sqrt{9+x}}\right)^{1/\sin x}$;

с) $\lim\limits_{x\to+0}(\ln\operatorname{ctg} x)^{\operatorname{tg} x}$; т) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^{1/x^2}-1}{2\operatorname{arctg} x^2-\pi}$.

§ 3.3. Формула Тейлора. Приложение к приближенным вычислениям

Если функция $f(x)$ непрерывна и имеет на отрезке $[a, b]$ непрерывные производные до $(n-1)$-го порядка включительно, а в каждой внутренней точке отрезка имеет конечную производную n-го порядка, то при $x\in[a, b]$ справедлива следующая *формула Тейлора*:

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!}+f'''(a)\frac{(x-a)^3}{3!}+\ldots$$
$$\ldots+f^{(n-1)}(a)\frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}+f^{(n)}(\xi)\frac{(x-a)^n}{n!},$$

где $\xi=a+\theta(x-a)$ и $0<\theta<1$.

Если положить в этой формуле $a=0$, то получим *формулу Маклорена*:

$$f(x)=f(0)+f'(0)\,x+f''(0)\frac{x^2}{2!}+\ldots+f^{(n-1)}(0)\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+f^{(n)}(\xi)\frac{x^n}{n!},$$

где $\xi=\theta x$, $0<\theta<1$.

Последний член в формуле Тейлора называется *остаточным членом формулы Тейлора в форме Лагранжа* и обозначается $R_n(x)$:

$$R_n(x)=\frac{f^{(n)}[a+\theta(x-a)]}{n!}(x-a)^n;$$

соответственно остаточный член в формуле Маклорена имеет вид

$$R_n(x)=\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n.$$

3.3.1. Разложить многочлен $P(x)=x^5-2x^4+x^3-x^2+2x-1$ по степеням двучлена $x-1$, пользуясь формулой Тейлора.

Решение. Для решения задачи необходимо найти значение многочлена и его производных в точке $x=1$. Проводим соответствующие вычисления:

$$P(1)=0, \qquad P'(1)=0,$$
$$P''(1)=0, \qquad P'''(1)=18,$$
$$P^{(4)}(1)=72, \quad P^{(5)}(1)=120,$$
$$P^{(n)}(x)=0 \quad (n \geqslant 6)$$

при любом x.

Подставив найденные значения в формулу Тейлора, получим

$$P(x)=\frac{18}{3!}(x-1)^3+\frac{72}{4!}(x-1)^4+\frac{120}{5!}(x-1)^5;$$
$$P(x)=3(x-1)^3+3(x-1)^4+(x-1)^5.$$

3.3.2. С помощью формулы Маклорена разложить по степеням x функцию

$$f(x)=\ln(1+x),$$

заданную на отрезке $[0, 1]$. Оценить погрешность, допускаемую при сохранении только десяти первых членов.

Решение.

$$f(0)=\ln 1=0.$$

Производные любого порядка от данной функции (см. § 2.3):

$$f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n},$$
$$f^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}(n-1)! \qquad (n=1, 2, 3, \ldots).$$

Подставив в формулу Маклорена, получим

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+\frac{x^9}{9}+R_{10}(x),$$

где остаточный член $R_{10}(x)$ в форме Лагранжа запишется так:

$$R_{10}(x)=\frac{f^{(10)}(\xi)}{10!}x^{10}=-\frac{9!}{10!(1+\xi)^{10}}x^{10}=-\frac{x^{10}}{10(1+\xi)^{10}} \quad (0<\xi<x).$$

Оценим абсолютную величину остаточного члена $R_{10}(x)$; учитывая, что $0 \leqslant x \leqslant 1$ и $\xi>0$, получим

$$|R_{10}(x)|=\left|\frac{-x^{10}}{10(1+\xi)^{10}}\right|<\frac{1}{10}.$$

3.3.3. Сколько нужно взять членов в формуле Маклорена для функции $f(x)=e^x$, чтобы получить многочлен, представляющий эту функцию на отрезке $[-1, 1]$, с точностью до 0,001?

Решение. Функция $f(x)=e^x$ имеет производную любого порядка

$$f^{(n)}(x)=e^x.$$

Поэтому к этой функции можно применить формулу Маклорена. Вычислим значения функции e^x и ее $n-1$ первых производных в точке $x=0$, а значение n-й производной — в точке $\xi=\theta x$ $(0<\theta<1)$. Будем иметь

$$f(0)=f'(0)=f''(0)=\ldots=f^{(n-1)}(0)=1;\ f^{(n)}(\xi)=e^{\xi}=e^{\theta x}.$$

Отсюда

$$f(x)=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+R_n(x),$$

где

$$R_n(x)=\frac{x^n}{n!}e^{\theta x}.$$

Так как, по условию, $|x|\leqslant 1$ и $0<\theta<1$, то

$$|R_n(x)|=\frac{|x|^n}{n!}e^{\theta x}<\frac{1}{n!}e<\frac{3}{n!}.$$

Следовательно, если выполняется неравенство

$$\frac{3}{n!}\leqslant 0{,}001, \qquad (*)$$

то заведомо будет выполняться неравенство

$$|R_n(x)|\leqslant 0{,}001.$$

Для этого достаточно взять $n\geqslant 7$ $(7!=5040)$. Таким образом, в формуле Маклорена достаточно взять 7 членов.

3.3.4. При каких значениях x приближенная формула

$$\cos x\approx 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}$$

имеет погрешность меньше 0,00005?

Решение. Правая часть приближенного равенства представляет собой шесть первых членов в формуле Маклорена для функции $\cos x$ (второй, четвертый и шестой члены равны нулю; проверьте!). Оценим $R_6(x)$. Так как $(\cos x)^{(6)}=-\cos x$, то

$$|R_6(x)|=\left|\frac{-\cos\theta x}{6!}x^6\right|\leqslant\frac{|x|^6}{6!}.$$

Чтобы погрешность была меньше 0,00005, надо выбрать значения x, удовлетворяющие неравенству

$$\frac{|x|^6}{6!}<0{,}00005.$$

Решая это неравенство, получим $|x|<0{,}575$.

3.3.5. Вычислить с точностью до 10^{-5} приближенные значения: а) $\cos 5°$; б) $\sin 20°$.

Решение. а) В формулу Маклорена

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n+2}$$

подставляем $x = \pi/36$; так как

$$\frac{x^2}{2!} = \frac{\pi^2}{2\cdot 36^2} = 0{,}003808, \qquad \frac{x^4}{4!} = \frac{1}{6}\left(\frac{x^2}{2}\right)^2 = 2{,}4\cdot 10^{-6},$$

то ограничимся только следующими членами:

$$\cos x \approx 1 - x^2/2.$$

При этом погрешность оценивается величиной

$$|R_4(x)| = \left|\frac{\cos\theta x}{4!}\, x^4\right| \leqslant \frac{|x|^4}{4!} < 2{,}5\cdot 10^{-6}.$$

Итак, с требуемой точностью,

$$\cos 5^\circ = \cos\frac{\pi}{36} = 1 - 0{,}00381 = 0{,}99619.$$

3.3.6. Вычислить с точностью до 10^{-6} приближенное значение $\sqrt[4]{83}$.

3.3.7. Доказать неравенства:

а) $x - x^2/2 < \ln(1+x) < x$ при $x > 0$;

б) $\operatorname{tg} x > x + x^3/3$ при $0 < x < \pi/2$;

в) $1 + \frac{1}{2}x - \frac{x^2}{8} < \sqrt{1+x} < 1 + \frac{1}{2}x$ при $0 < x < \infty$.

Решение. а) По формуле Маклорена с остаточным членом $R_2(x)$ имеем

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2(1+\xi)^2},$$

где $0 < \xi < x$.

По той же формуле с остаточным членом $R_3(x)$ имеем

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3(1+\xi_1)^3}, \text{ где } 0 < \xi_1 < x.$$

Так как $\frac{x^2}{2(1+\xi)^2} > 0$ и $\frac{x^3}{3(1+\xi_1)^3} > 0$ при $x > 0$, то отсюда следует, что

$$x - x^2/2 < \ln(1+x) < x.$$

3.3.8. Показать, что $\sin(\alpha+h)$ отличается от $\sin\alpha + h\cos\alpha$ не более, чем на $h^2/2$.

Решение. По формуле Тейлора

$$\sin(\alpha+h) = \sin\alpha + h\cos\alpha - \frac{h^2}{2}\sin\xi;$$

отсюда

$$|\sin(\alpha+h) - (\sin\alpha + h\cos\alpha)| = \frac{h^2}{2}|\sin\xi| \leqslant \frac{h^2}{2}.$$