§ 3.4. Локальная формула Тейлора. Применение к вычислению пределов

Локальной формулой Тейлора называется формула

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+o\,(|x-a|^n),$$

где запись $\varphi(x)=o[\psi(x)]$ означает, что функция $\varphi(x)$ имеет при $x \longrightarrow a$ более высокий порядок малости, чем функция $\psi(x)$, т. е. $\lim\limits_{x \to a}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=0$.

В частности, при $a=0$ имеем

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o\,(|x|^n).$$

Локальная формула Тейлора показывает, что, заменив $f(x)$ в окрестности точки a ее многочленом Тейлора n-й степени, мы совершим ошибку, представляющую собой при $x \longrightarrow a$ бесконечно малую более высокого порядка, чем $(x-a)^n$.

Для практических задач наиболее важны следующие пять основных разложений:

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+o\,(x^n);$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+o\,(x^{2n});$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o\,(x^{2n+1});$$

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o\,(x^n);$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o\,(x^n).$$

3.4.1. Написать разложение функции $f(x)=\sin^2 x-x^2e^{-x}$ по целым положительным степеням x, ограничиваясь членами до четвертого порядка малости относительно x.

Решение. Имеем

$$f(x)=\left[x-\frac{x^3}{6}+o\,(x^4)\right]^2-x^2\left[1-x+\frac{x^2}{2}+o\,(x^2)\right]=$$

$$=x^2-\frac{x^4}{3}+o\,(x^5)-x^2+x^3-\frac{x^4}{2}+o\,(x^4)=x^3-\frac{5}{6}x^4+o\,(x^4).$$

3.4.2. Написать разложение функций:

а) $f(x)=x\sqrt{1-x^2}-\cos x\ln(1+x)$;

б) $f(x)=\ln(1+\sin x)$

по целым положительным степеням x, ограничиваясь членами до пятого порядка малости относительно x.

3.4.3. С помощью локальной формулы Тейлора вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\sqrt{1+x^2}\cos x}{\operatorname{tg}^4 x}$; б) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+3x}-\sqrt{1+2x}}{x^2}$;

в) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x - e^{-x^2/2}}{x^4}$; г) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$;

д) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x+e^{-x}-2}{x^2}$.

Решение. а) Сохраняя в знаменателе и числителе члены до четвертого порядка относительно x, получим

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\sqrt{1+x^2}\cos x}{\operatorname{tg}^4 x} = \lim_{x \to 0} \frac{1-(1+x^2)^{1/2}\cos x}{x^4} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1-\left[1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1/2\,(-1/2)}{2}x^4+o(x^4)\right]\left[1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^5)\right]}{x^4} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{24}x^4+o(x^4)}{x^4} = \lim_{x \to 0}\left[\frac{1}{3}+\frac{o(x^4)}{x^4}\right] = \frac{1}{3}.$$

3.4.4. Написать разложения следующих функций по целым положительным степеням переменной x до членов указанного порядка включительно:

а) $f(x) = e^{2x-x^2}$ до члена с x^5;

б) $\ln\cos x$ до члена с x^6;

в) $\dfrac{x}{e^x-1}$ до члена с x^4.

§ 3.5. Признаки монотонности функции

Пусть на отрезке $[a, b]$ определена непрерывная функция $f(x)$, имеющая внутри отрезка конечную производную. Тогда:

1. Для того чтобы $f(x)$ была неубывающей (невозрастающей) на $[a, b]$, необходимо и достаточно, чтобы $f'(x) \geqslant 0$ ($f'(x) \leqslant 0$) для всех x из (a, b).

2. Для того чтобы $f(x)$ была возрастающей (убывающей) на $[a, b]$, достаточно выполнения условия $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) для всех x из (a, b).

3.5.1. Определить промежутки монотонности функций:

а) $f(x) = 2x^2 - \ln x$; б) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 - 24x + 7$;

в) $f(x) = x^2 e^{-x}$; г) $f(x) = \ln|x|$;

д) $f(x) = 4x^3 - 21x^2 + 18x + 20$; е) $f(x) = e^x + 5x$.

Решение. Решение задачи сводится к нахождению для каждой из данных функций промежутков, где производная сохраняет знак.