по целым положительным степеням x, ограничиваясь членами до пятого порядка малости относительно x.

3.4.3. С помощью локальной формулы Тейлора вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1+x^2}\cos x}{\operatorname{tg}^4 x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+3x}-\sqrt{1+2x}}{x^2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-e^{-x^2/2}}{x^4}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{x^2}$.

Решение. а) Сохраняя в знаменателе и числителе члены до четвертого порядка относительно x, получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1+x^2}\cos x}{\operatorname{tg}^4 x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-(1+x^2)^{1/2}\cos x}{x^4}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\left[1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1/2\,(-1/2)}{2}x^4+o(x^4)\right]\left[1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^5)\right]}{x^4}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{24}x^4+o(x^4)}{x^4}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{3}+\frac{o(x^4)}{x^4}\right]=\frac{1}{3}.$$

3.4.4. Написать разложения следующих функций по целым положительным степеням переменной x до членов указанного порядка включительно:

а) $f(x)=e^{2x-x^2}$ до члена с x^5;

б) $\ln\cos x$ до члена с x^6;

в) $\dfrac{x}{e^x-1}$ до члена с x^4.

§ 3.5. Признаки монотонности функции

Пусть на отрезке $[a, b]$ определена непрерывная функция $f(x)$, имеющая внутри отрезка конечную производную. Тогда:

1. Для того чтобы $f(x)$ была неубывающей (невозрастающей) на $[a, b]$, необходимо и достаточно, чтобы $f'(x)\geqslant 0$ $(f'(x)\leqslant 0)$ для всех x из (a, b).

2. Для того чтобы $f(x)$ была возрастающей (убывающей) на $[a, b]$, достаточно выполнения условия $f'(x)>0$ $(f'(x)<0)$ для всех x из (a, b).

3.5.1. Определить промежутки монотонности функций:

а) $f(x)=2x^2-\ln x$; б) $f(x)=2x^3-9x^2-24x+7$;

в) $f(x)=x^2e^{-x}$; г) $f(x)=\ln|x|$;

д) $f(x)=4x^3-21x^2+18x+20$; е) $f(x)=e^x+5x$.

Решение. Решение задачи сводится к нахождению для каждой из данных функций промежутков, где производная сохраняет знак.

Если функция $f(x)$ в интервале (a, b) обладает непрерывной производной и имеет в нем конечное число стационарных точек $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < b)$, где $f'(x_k) = 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, то $f'(x)$ сохраняет знак в каждом из интервалов (a, x_1), (x_1, x_2), ..., (x_{n-1}, x_n), (x_n, b).

а) Функция определена при $x > 0$.

Найдем производную

$$f'(x) = 4x - 1/x.$$

Функция возрастает, если $4x - 1/x > 0$, т. е. $x > 1/2$.

Функция убывает, если $4x - 1/x < 0$, т. е. $x < 1/2$.

Итак, в интервале $0 < x \leqslant 1/2$ функция убывает, в интервале $1/2 < x < +\infty$ возрастает.

б) Вычисляем производную

$$f'(x) = 6x^2 - 18x - 24 = 6(x^2 - 3x - 4).$$

Производная обращается в нуль в точках $x = -1$ и $x = 4$. Так как $f'(x)$ есть квадратный трехчлен со старшим коэффициентом $6 > 0$, то $f'(x) > 0$ в интервалах $(-\infty, -1)$, $(4, \infty)$ и $f'(x) < 0$ в интервале $(-1, 4)$. Следовательно, в первых двух интервалах $f(x)$ возрастает, а в интервале $(-1, 4)$ убывает.

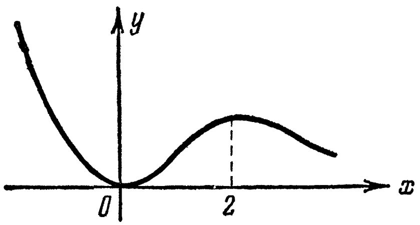

Рис. 39.

в) В этом случае производная $f'(x) = (2x - x^2)e^{-x}$ обращается в нуль в точках $x = 0$ и $x = 2$. В интервалах $(-\infty, 0)$ и $(2, \infty)$ производная $f'(x) < 0$ и функция убывает, в интервале $(0, 2)$ производная $f'(x) > 0$ и функция возрастает (рис. 39).

3.5.2. Найти интервалы убывания и возрастания функций:

а) $f(x) = \cos(\pi/x)$; б) $f(x) = \sin x + \cos x$ на отрезке $[0, 2\pi]$.

Решение. а) Функция $y = \cos(\pi/x)$ определена и дифференцируема на всей числовой оси, за исключением точки $x = 0$;

$$y' = \frac{\pi}{x^2} \sin \frac{\pi}{x}.$$

Очевидно, что знак y' совпадает со знаком множителя $\sin(\pi/x)$.

1) $\sin(\pi/x) > 0$ при условии

$$2k\pi < \pi/x < (2k+1)\pi \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots);$$

2) $\sin(\pi/x) < 0$ при условии

$$(2k+1)\pi < \pi/x < 2(k+1)\pi.$$

Следовательно, функция возрастает в интервалах

$$\left(\frac{1}{2k+1}, \frac{1}{2k}\right)$$

и убывает в интервалах

$$\left(\frac{1}{2k+2},\ \frac{1}{2k+1}\right).$$

3.5.3. Изучить ход изменения функции

$f(x)=2\sin x+\operatorname{tg} x-3x$ в интервале $(-\pi/2,\ \pi/2)$.

Решение. Производная

$$f'(x)=2\cos x+\frac{1}{\cos^2 x}-3=\frac{(1-\cos x)(1+\cos x-2\cos^2 x)}{\cos^2 x}=$$

$$=\frac{4\sin^3(x/2)\sin(3x/2)}{\cos^2 x}$$

положительна в интервалах $(-\pi/2,\ 0)$ и $(0,\ \pi/2)$, обращаясь в нуль только при $x=0$. Следовательно, в интервале $(-\pi/2,\ \pi/2)$ функция $f(x)$ возрастает.

3.5.4. Доказать, что при $0<x\leqslant 1$ выполняются неравенства

$$x-x^3/3<\operatorname{arctg} x<x-x^3/6.$$

Решение. Мы докажем только правое из этих неравенств (левое доказывается аналогично).

Производная функции

$$f(x)=\operatorname{arctg} x-x+\frac{x^3}{6}$$

равна

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}-1+\frac{x^2}{2}=\frac{x^2(x^2-1)}{2(1+x^2)}.$$

Функция $f(x)$ непрерывна на всей числовой оси; в частности, она непрерывна на отрезке $[0,\ 1]$, а внутри этого отрезка $f'(x)<0$. Поэтому $f(x)$ убывает на отрезке $[0,\ 1]$ и, следовательно, для любой точки x, $0<x\leqslant 1$, выполняется неравенство $f(x)<f(0)=0$ или

$$\operatorname{arctg} x-x+x^3/6<0,$$

откуда

$$\operatorname{arctg} x<x-x^3/6.$$

3.5.5. Доказать неравенства

$$x-x^3/6<\sin x<x \quad \text{при} \quad x>0.$$

3.5.6. Доказать, что при $0\leqslant p\leqslant 1$ и любых положительных a и b справедливо неравенство $(a+b)^p\leqslant a^p+b^p$.

Решение. Если разделить обе части неравенства на b^p, то оно примет вид

$$(a/b+1)^p\leqslant (a/b)^p+1$$

или

$$(1+x)^p\leqslant 1+x^p, \qquad (*)$$

где $x=a/b$.

Покажем, что неравенство (*) имеет место при любом положительном x.

Введем функцию

$$f(x)=1+x^p-(1+x)^p; \qquad x \geqslant 0.$$

Производная этой функции

$$f'(x)=px^{p-1}-p(1+x)^{p-1}=p\left[\frac{1}{x^{1-p}}-\frac{1}{(1+x)^{1-p}}\right]$$

всюду положительна, так как, по условию, $1-p \geqslant 0$ и $x>0$. Следовательно, функция возрастает в промежутке $[0, \infty)$, т. е. $f(x)=1+x^p-(1+x)^p>f(0)=0$, откуда $1+x^p>(1+x)^p$, что и требовалось доказать. Если положить $p=1/n$, то получим

$$\sqrt[n]{a+b} \leqslant \sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b} \qquad (n \geqslant 1).$$

3.5.7. Доказать, что функция $y=x^5+2x^3+x$ везде возрастает, а функция $y=1-x^3$ везде убывает.

3.5.8. Определить интервалы возрастания и убывания функций:

а) $f(x)=x^3+2x-5$; б) $f(x)=\ln(1-x^2)$;

в) $f(x)=\cos x-x$; г) $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{x}$;

д) $f(x)=\frac{2x}{\ln x}$; е) $f(x)=\frac{2x}{1+x^2}$.

3.5.9. Доказать неравенства:

а) $\operatorname{tg} x>x+x^3/3$, если $(0<x<\pi/2)$;

б) $e^x \geqslant 1+x$ для всех значений x;

в) $e^x>ex$ при $x>1$.

3.5.10. При каких значениях коэффициента a функция $f(x)=x^3-ax$ возрастает на всей числовой оси?

3.5.11. При каком значении b функция

$$f(x)=\sin x-bx+c$$

убывает на всей числовой оси?

§ 3.6. Максимумы и минимумы функции

Если функция $y=f(x)$ определена на промежутке X, то внутренняя точка x_0 этого промежутка называется *точкой максимума* функции $f(x)$ [*точкой минимума* функции $f(x)$], если существует такая окрестность $U \in X$ точки x_0, в которой для всех $x \in U$ выполняется неравенство $f(x) \leqslant f(x_0)$ $[f(x) \geqslant f(x_0)]$. Точки максимума и точки минимума называются точками *экстремума*.

Необходимое условие точки экстремума. В точках экстремума производная $f'(x)$ равна нулю или не существует.

Точки, в которых производная $f'(x)$ равна нулю или не существует, называются *критическими точками*.

Достаточные условия экстремума.

I. Пусть функция $f(x)$ непрерывна в некоторой окрестности точки x_0.

1. Если $f'(x)>0$ при $x<x_0$ и $f'(x)<0$ при $x>x_0$ (т. е. при переходе