Покажем, что неравенство (*) имеет место при любом положительном $x$.

Введем функцию

$$f(x)=1+x^p-(1+x)^p; \qquad x \geqslant 0.$$

Производная этой функции

$$f'(x)=px^{p-1}-p(1+x)^{p-1}=p\left[\frac{1}{x^{1-p}}-\frac{1}{(1+x)^{1-p}}\right]$$

всюду положительна, так как, по условию, $1-p \geqslant 0$ и $x>0$. Следовательно, функция возрастает в промежутке $[0, \infty)$, т. е. $f(x)=1+x^p-(1+x)^p>f(0)=0$, откуда $1+x^p>(1+x)^p$, что и требовалось доказать. Если положить $p=1/n$, то получим

$$\sqrt[n]{a+b} \leqslant \sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b} \qquad (n \geqslant 1).$$

**3.5.7.** Доказать, что функция $y=x^5+2x^3+x$ везде возрастает, а функция $y=1-x^3$ везде убывает.

**3.5.8.** Определить интервалы возрастания и убывания функций:

а) $f(x)=x^3+2x-5$; б) $f(x)=\ln(1-x^2)$;

в) $f(x)=\cos x-x$; г) $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{x}$;

д) $f(x)=\frac{2x}{\ln x}$; е) $f(x)=\frac{2x}{1+x^2}$.

**3.5.9.** Доказать неравенства:

а) $\operatorname{tg} x>x+x^3/3$, если $(0<x<\pi/2)$;

б) $e^x \geqslant 1+x$ для всех значений $x$;

в) $e^x>ex$ при $x>1$.

**3.5.10.** При каких значениях коэффициента $a$ функция $f(x)=x^3-ax$ возрастает на всей числовой оси?

**3.5.11.** При каком значении $b$ функция

$$f(x)=\sin x-bx+c$$

убывает на всей числовой оси?

## § 3.6. Максимумы и минимумы функции

Если функция $y=f(x)$ определена на промежутке $X$, то внутренняя точка $x_0$ этого промежутка называется *точкой максимума* функции $f(x)$ [*точкой минимума* функции $f(x)$], если существует такая окрестность $U \in X$ точки $x_0$, в которой для всех $x \in U$ выполняется неравенство $f(x) \leqslant f(x_0)$ [$f(x) \geqslant f(x_0)$]. Точки максимума и точки минимума называются точками *экстремума*.

Необходимое условие точки экстремума. В точках экстремума производная $f'(x)$ равна нулю или не существует.

Точки, в которых производная $f'(x)$ равна нулю или не существует, называются *критическими точками*.

Достаточные условия экстремума.

I. Пусть функция $f(x)$ непрерывна в некоторой окрестности точки $x_0$.

1. Если $f'(x)>0$ при $x<x_0$ и $f'(x)<0$ при $x>x_0$ (т. е. при переходе

через точку $x_0$ производная меняет знак $+$ на $-$), то в точке $x_0$ функция достигает максимума.

2. Если $f'(x) < 0$ при $x < x_0$ и $f'(x) > 0$ при $x > x_0$ (т. е. при переходе через точку $x_0$ производная меняет знак $-$ на $+$), то в точке $x_0$ функция достигает минимума.

3. Если производная не меняет знака при переходе через $x_0$, то экстремума нет.

II. Пусть в критической точке $x_0$ функция $f(x)$ дважды дифференцируема (значит, $f'(x_0)=0$). Если при этом $f''(x_0) < 0$, то в точке $x_0$ функция достигает максимума, если $f''(x_0) > 0$, то в точке $x_0$ функция достигает минимума, если же $f''(x_0)=0$, то вопрос о наличии экстремума в этой точке остается открытым.

III. Пусть $f'(x_0)=f''(x_0)=\ldots=f^{(n-1)}(x_0)=0$, но $f^{(n)}(x_0)\neq 0$. Если число $n$ четное, то при $f^{(n)}(x_0) < 0$ в точке $x_0$ — максимум, при $f^{(n)}(x_0) > 0$ — минимум. Если же число $n$ нечетное, то экстремума в точке $x_0$ нет.

IV. Пусть некоторая функция $y=f(x)$ задана параметрически,

$$x=\varphi(t), \qquad y=\psi(t),$$

где функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ в некотором промежутке изменения аргумента $t$ имеют производные как первого, так и второго порядка, причем $\varphi'(t)\neq 0$. Пусть, далее, при $t=t_0$

$$\psi'(t)=0.$$

Тогда:

а) если $\psi''(t_0) < 0$, то функция $y=f(x)$ при $x=x_0=\varphi(t_0)$ имеет максимум;

б) если $\psi''(t_0) > 0$, то функция $y=f(x)$ при $x=x_0=\varphi(t_0)$ имеет минимум;

в) если $\psi''(t_0)=0$, то вопрос о наличии экстремума остается открытым.

Точки, в которых $\varphi'(t)$ обращается в нуль, требуют специального исследования.

**3.6.1.** Пользуясь первой производной, найти экстремумы функций:

а) $f(x)=\frac{3}{4}x^4-x^3-9x^2+7$;

б) $f(x)=x^4-8x^3+22x^2-24x+12$;

в) $f(x)=x(x+1)^3(x-3)^2$; г) $f(x)=\frac{x^2-3x+2}{x^2+2x+1}$.

Решение. а) Функция определена и дифференцируема на всей числовой оси. Поэтому критическими точками являются только действительные корни производной

$$f'(x)=3x^3-3x^2-18x=3x(x+2)(x-3).$$

Приравняв последнее выражение нулю, найдем критические точки: $x_1=-2$, $x_2=0$, $x_3=3$ (их всегда следует располагать в порядке возрастания). Теперь исследуем знак производной в окрестности каждой из этих точек. Так как левее точки $x=-2$ критических точек нет, то производная во всех точках $x<-2$ имеет один и тот же знак: она отрицательна. Аналогично на интервале $(-2, 0)$ производная положительна, на интервале $(0, 3)$ отрицательна, при $x>3$ положительна. Следовательно, в точках $x_1=-2$ и $x_3=3$ минимумы $f(-2)=-9$ и $f(3)=-40\frac{1}{4}$, а в точке $x_2=0$ максимум $f(0)=7$.

в) Как и в примере а), критические точки — это корни производной $f'(x)$, так как функция определена и дифференцируема на всей числовой оси. Найдем $f'(x)$:

$$f'(x) = (x+1)^3(x-3)^2 + 3x(x+1)^2(x-3)^2 + 2x(x+1)^3(x-3) = \\ = 3(x+1)^2(x-3)(2x^2-3x-1).$$

Приравняв последнее выражение нулю, найдем критические точки:

$$x_1 = -1, \ x_2 = (3-\sqrt{17})/4, \ x_3 = (3+\sqrt{17})/4, \ x_4 = 3.$$

Составим таблицу знаков производной на интервалах между критическими точками:

| Интервалы | $x < x_1$ | $x_1 < x < x_2$ | $x_2 < x < x_3$ | $x_3 < x < x_4$ | $x_4 < x$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Знак $f'(x)$ | $-$ | $-$ | $+$ | $-$ | $+$ |

Из этой таблицы видно, что в точке $x_1 = -1$ нет экстремума, в точке $x_2$ — минимум, в точке $x_3$ — максимум, в точке $x_4$ — минимум.

**3.6.2.** Пользуясь первой производной, найти экстремумы функций:

а) $f(x) = 3\sqrt[3]{x^2} - x^2$; б) $f(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2} + \sqrt[3]{(x+1)^2}$.

Решение. а) Функция определена и непрерывна на всей числовой оси. Найдем производную:

$$f'(x) = 2\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} - x\right).$$

Из уравнения $f'(x) = 0$ найдем корни производной: $x = \pm 1$.

Кроме того, производная обращается в бесконечность в точке $x = 0$. Таким образом, критическими точками являются $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$. Результаты исследования знака производной в окрестности этих точек приведены на рис. 40. Это исследование показывает, что функция имеет два максимума: $f(-1) = 2$; $f(1) = 2$ и минимум $f(0) = 0$.

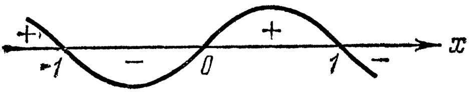


Рис. 40.

**3.6.3.** Пользуясь второй производной, выяснить характер экстремума функций:

а) $y = 2\sin x + \cos 2x$; б) $f(x) = 2x^3 - 15x^2 - 84x + 8$.

Решение. а) Поскольку функция периодическая, мы можем ограничиться отрезком $[0, 2\pi]$. Найдем первую и вторую производные:

$$y' = 2\cos x - 2\sin 2x = 2\cos x(1 - 2\sin x);$$
$$y'' = -2\sin x - 4\cos 2x.$$

Из уравнения $2\cos x(1 - 2\sin x) = 0$ определяем критические точки на отрезке $[0, 2\pi]$:

$$x_1 = \pi/6, \ x_2 = \pi/2, \ x_3 = 5\pi/6, \ x_4 = 3\pi/2.$$

Теперь находим знак второй производной в каждой критической точке:

$y''(\pi/6) = -3 < 0$, следовательно, в точке $x_1 = \pi/6$ имеем максимум $y(\pi/6) = 3/2$;

$y''(\pi/2) = 2 > 0$, следовательно, в точке $x_2 = \pi/2$ имеем минимум $y(\pi/2) = 1$;

$y''(5\pi/6) = -3 < 0$, следовательно, в точке $x_3 = 5\pi/6$ имеем максимум $y(5\pi/6) = 3/2$;

$y''(3\pi/2) = 6 > 0$, следовательно, в точке $x_4 = 3\pi/2$ имеем минимум $y(3\pi/2) = -3$ (рис. 41).

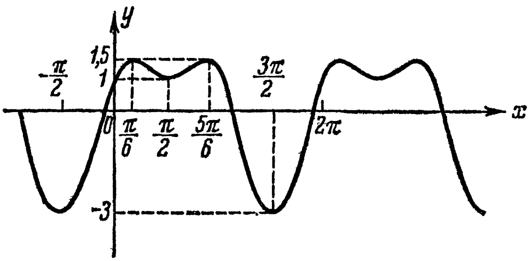


Рис. 41.

**3.6.4.** Исследовать на экстремум функции:

а) $f(x) = \begin{cases} -2x & (x < 0), \\ 3x + 5 & (x \geqslant 0); \end{cases}$

б) $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 3 & (x \neq 0), \\ 4 & (x = 0). \end{cases}$

Решение. а) Хотя производная

$$f'(x) = \begin{cases} -2 & (x < 0), \\ 3 & (x > 0) \end{cases}$$

существует во всех точках, кроме точки $x = 0$, и меняет знак с «—» на «+» при переходе через точку $x = 0$, минимума здесь нет!

$$f(0) = 5 > f(x) \quad \text{при} \quad -1 < x < 0.$$

Объясняется это нарушением непрерывности функции в точке $x = 0$.

б) Здесь производная $f'(x) = 4x$ $(x \neq 0)$ тоже существует во всех точках, кроме $x = 0$, и меняет знак с — на + при переходе через точку $x = 0$. Тем не менее здесь мы имеем не минимум, а максимум, что легко проверить непосредственно.

Объясняется это нарушением непрерывности функции в точке $x = 0$.

**3.6.5.** Найти экстремумы функций:

а) $f(x) = \dfrac{50}{3x^4 + 8x^3 - 18x^2 + 60}$; б) $f(x) = \sqrt{e^{x^2} - 1}$.

Решение. а) Здесь проще найти экстремумы функции $f_1(x) = 3x^4 + 8x^3 - 18x^2 + 60$. Так как

$$f_1'(x) = 12x^3 + 24x^2 - 36x = 12x(x^2 + 2x - 3),$$
$$f_1''(x) = 12(3x^2 + 4x - 3),$$

то критическими точками будут:

$$x_1 = -3, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 1,$$

а вид экстремума легко определить по знаку второй производной $f_1''(-3) > 0$, следовательно, в точке $x_1 = -3$ функция $f_1(x)$ имеет минимум, а заданная функция $f(x)$, очевидно, имеет максимум $f(-3) = -2/3$; $f_1''(0) < 0$, следовательно, в точке $x_2 = 0$ функция $f_1(x)$ имеет максимум, а функция $f(x)$ — минимум $f(0) = 5/6$; $f_1''(1) > 0$, следовательно, в точке $x_3 = 1$ функция $f_1(x)$ имеет минимум, а функция $f(x)$ — максимум $f(1) = 50/53$.

б) Здесь проще найти точки экстремума подкоренного выражения

$$f_1(x) = e^{x^2} - 1,$$

которые совпадают с точками экстремума функции $f(x)$. Находим критические точки $f_1(x)$:

$f_1'(x) = 2xe^{x^2}$; $f_1'(x) = 0$ в точке $x = 0$. Определяем знак второй производной в точке $x = 0$:

$$f_1''(x) = 2e^{x^2}(1 + 2x^2), \qquad f_1''(0) = 2 > 0.$$

Поэтому точка $x = 0$ есть точка минимума функции $f_1(x)$; она же будет также точкой минимума и для заданной функции $f(x)$: $f(0) = 0$.

**3.6.6.** Исследовать вид экстремума функции $y = \operatorname{ch} x + \cos x$ в точке $x = 0$.

Решение. Функция $y$ четная и, очевидно, имеет экстремум в точке $x = 0$. Для определения вида экстремума вычислим производные этой функции в точке $x = 0$:

$$y' = \operatorname{sh} x - \sin x, \quad y'(0) = 0;$$
$$y'' = \operatorname{ch} x - \cos x, \quad y''(0) = 0;$$
$$y''' = \operatorname{sh} x + \sin x, \quad y'''(0) = 0;$$
$$y^{(4)} = \operatorname{ch} x + \cos x; \quad y^{(4)}(0) = 2 > 0.$$

Так как первой отличной от нуля производной в точке $x = 0$ оказалась производная четного порядка, принимающая положительное значение, то в этой точке минимум $y(0) = 2$.

**3.6.7.** Исследовать на экстремум в точке $x = 0$ следующие функции:

а) $y = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!}$; б) $y = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$.

Решение. а) $y' = -\sin x + x - \frac{x^2}{2}$; $y'(0) = 0$;

$$y'' = -\cos x + 1 - x; \quad y''(0) = 0;$$
$$y''' = \sin x - 1; \quad y'''(0) = -1 \neq 0.$$

Итак, первая отличная от нуля производная в точке $x=0$ есть производная третьего порядка, т. е. нечетного порядка. Значит, в точке $x=0$ экстремума нет.

**3.6.8.** Исследовать на экстремум функции:

а) $f(x)=x^4e^{-x^2}$; б) $f(x)=\sin 3x-3\sin x$.

Решение. а) Функция $f(x)=x^4e^{-x^2}$ всюду непрерывно дифференцируема. Приравняв нулю производную

$$f'(x)=4x^3e^{-x^2}-2x^5e^{-x^2}=x^3e^{-x^2}(4-2x^2),$$

находим критические точки:

$$x_1=-\sqrt{2};\quad x_2=0;\quad x_3=\sqrt{2}.$$

Вычислим значение второй производной в критических точках:

$$f''(x)=12x^2e^{-x^2}-8x^4e^{-x^2}-10x^4e^{-x^2}+4x^6e^{-x^2}=$$
$$=2x^2e^{-x^2}(6-9x^2+2x^4);$$
$$f''(0)=0;\quad f''(-\sqrt{2})<0;\quad f''(\sqrt{2})<0.$$

Следовательно, в точках $x_1=-\sqrt{2}$ и $x_3=+\sqrt{2}$ функция достигает максимума $f(\pm\sqrt{2})=4e^{-2}=4/e^2$. Что же касается критической точки $x_2=0$, то ничего пока сказать нельзя, надо находить производные $f(x)$ высших порядков (до четвертого порядка!). Это громоздко, поэтому обратимся к первому достаточному признаку экстремума: найдем знаки первой производной в окрестности критической точки $x_2=0$:

$$f'(-1)<0;\ f'(1)>0.$$

Зничит, в точке $x=0$ функция достигает минимума $f(0)=0$.

**3.6.9.** Функция $y=f(x)$ задана параметрически:

$$\begin{cases} x=\varphi(t)=t^5-5t^3-20t+7, \\ y=\psi(t)=4t^3-3t^2-18t+3 \end{cases}\qquad (-2<t<2).$$

Найти экстремумы этой функции.

Решение. Имеем

$$\varphi'(t)=5t^4-15t^2-20.$$

На интервале $(-2,\ 2)$ $\varphi'(t)\neq 0$.

Найдем $\psi'(t)$ и приравняем нулю:

$$\psi'(t)=12t^2-6t-18=0.$$

Отсюда $t_1=-1$ и $t_2=3/2$.

Эти корни являются внутренними точками рассматриваемого промежутка изменения параметра $t$.

Далее:

$$\psi''(t)=24t-6;\ \psi''(-1)=-30<0,\ \psi''(3/2)=30>0.$$

Следовательно, функция $y=f(x)$ имеет при $t=-1$ (т. е. при $x=31$)

максимум $y=14$, а при $t=3/2$ (т. е. при $x=-1033/32$) минимум $y=-17{,}25$.

**3.6.10.** Найти максимумы и минимумы функций:

а) $f(x)=x^2e^{-x}$; б) $f(x)=\dfrac{4x}{x^2+4}$;

в) $f(x)=-x^2\sqrt[5]{(x-2)^2}$; г) $f(x)=\dfrac{14}{x^4-8x^2+2}$;

д) $f(x)=\sqrt[3]{2x^3+3x^2-36x}$;

е) $f(x)=x^2\ln x$; ж) $f(x)=x\ln^2 x$.

**3.6.11.** Исследовать на экстремум в точке $x=0$ следующие функции:

а) $f(x)=\sin x-x$; б) $f(x)=\sin x-x+x^3/3$;

в) $f(x)=\sin x-x+\dfrac{x^3}{3!}-\dfrac{x^4}{4!}$;

г) $f(x)=\begin{cases} e^{1/x}, & \text{если } x\neq 0, \\ 0, & \text{если } x=0. \end{cases}$

## § 3.7. Отыскание наибольших и наименьших значений функции

Наибольшее (наименьшее) значение непрерывной функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ достигается или в критических точках функции, или на концах отрезка. Для определения наибольшего (наименьшего) значения функции надо вычислить значения функции во всех критических точках на отрезке $[a, b]$, значения $f(a)$, $f(b)$ функции на концах отрезка и взять наибольшее (наименьшее) из полученных чисел.

Если функция задана и непрерывна в некотором промежутке и если этот промежуток не является отрезком, то среди значений функции $f(x)$ может и не быть ни наибольшего, ни наименьшего.

**3.7.1.** Найти наибольшее и наименьшее значения функций на указанных промежутках:

а) $f(x)=2x^3-3x^2-12x+1$ на отрезке $[-2, 5/2]$;

б) $f(x)=x^2\ln x$ на отрезке $[1, e]$;

в) $f(x)=xe^{-x}$ на промежутке $[0, +\infty)$;

г) $f(x)=\sqrt{(1-x^2)(1+2x^2)}$ на отрезке $[-1, 1]$.

Решение. а) Найдем производную $f'(x)$:

$$f'(x)=6x^2-6x-12.$$

Она обращается в нуль в двух точках: $x_1=-1$ и $x_2=2$. Обе эти точки лежат внутри заданного отрезка; следовательно, обе должны приниматься во внимание. Для отыскания экстремальных значений функции необходимо вычислить значения функции в точках $x_1$ и $x_2$, а также на концах отрезка:

$$f(-2)=-3,\ f(-1)=8;\ f(2)=-19,\ f\left(\frac{5}{2}\right)=-16\frac{1}{2}.$$