максимум $y=14$, а при $t=3/2$ (т. е. при $x=-1033/32$) минимум $y=-17{,}25$.

3.6.10. Найти максимумы и минимумы функций:

а) $f(x)=x^2e^{-x}$; б) $f(x)=\dfrac{4x}{x^2+4}$;

в) $f(x)=-x^2\sqrt[5]{(x-2)^2}$; г) $f(x)=\dfrac{14}{x^4-8x^2+2}$;

д) $f(x)=\sqrt[3]{2x^3+3x^2-36x}$;

е) $f(x)=x^2\ln x$; ж) $f(x)=x\ln^2 x$.

3.6.11. Исследовать на экстремум в точке $x=0$ следующие функции:

а) $f(x)=\sin x-x$; б) $f(x)=\sin x-x+x^3/3$;

в) $f(x)=\sin x-x+\dfrac{x^3}{3!}-\dfrac{x^4}{4!}$;

г) $f(x)=\begin{cases} e^{1/x}, & \text{если } x\neq 0,\\ 0, & \text{если } x=0.\end{cases}$

§ 3.7. Отыскание наибольших и наименьших значений функции

Наибольшее (наименьшее) значение непрерывной функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ достигается или в критических точках функции, или на концах отрезка. Для определения наибольшего (наименьшего) значения функции надо вычислить значения функции во всех критических точках на отрезке $[a, b]$, значения $f(a)$, $f(b)$ функции на концах отрезка и взять наибольшее (наименьшее) из полученных чисел.

Если функция задана и непрерывна в некотором промежутке и если этот промежуток не является отрезком, то среди значений функции $f(x)$ может и не быть ни наибольшего, ни наименьшего.

3.7.1. Найти наибольшее и наименьшее значения функций на указанных промежутках:

а) $f(x)=2x^3-3x^2-12x+1$ на отрезке $[-2, 5/2]$;

б) $f(x)=x^2\ln x$ на отрезке $[1, e]$;

в) $f(x)=xe^{-x}$ на промежутке $[0, +\infty)$;

г) $f(x)=\sqrt{(1-x^2)(1+2x^2)}$ на отрезке $[-1, 1]$.

Решение. а) Найдем производную $f'(x)$:

$$f'(x)=6x^2-6x-12.$$

Она обращается в нуль в двух точках: $x_1=-1$ и $x_2=2$. Обе эти точки лежат внутри заданного отрезка; следовательно, обе должны приниматься во внимание. Для отыскания экстремальных значений функции необходимо вычислить значения функции в точках x_1 и x_2, а также на концах отрезка:

$$f(-2)=-3,\ f(-1)=8;\ f(2)=-19,\ f\left(\frac{5}{2}\right)=-16\frac{1}{2}.$$

Следовательно, наибольшее значение равно $f(-1)=8$, наименьшее значение равно $f(2)=-19$.

б) Ищем критические точки: $f'(x)=x(1+2\ln x)$. Производная $f'(x)$ не обращается в нуль внутри заданного отрезка $[1, e]$. Поэтому внутри заданного отрезка нет критических точек, остается вычислить значения функции на концах отрезка

$$f(1)=0;\ f(e)=e^2.$$

Таким образом, $f(1)=0$ есть наименьшее значение функции; $f(e)=e^2$ — наибольшее значение.

3.7.2. Найти наибольшее и наименьшее значения функций в указанных промежутках:

а) $y=\sin x\sin 2x$ в промежутке $(-\infty, \infty)$;

б) $y=\arccos x^2$ на отрезке $[-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2]$;

в) $y=x+\sqrt{x}$ на отрезке $[0, 4]$.

Решение. а) Представим функцию $y=\sin x\sin 2x$ в виде

$$y=\frac{\cos x-\cos 3x}{2}.$$

Отсюда видно, что функция четная и имеет период 2π. Следовательно, наибольшее и наименьшее значения достаточно искать среди экстремумов на отрезке $[0, \pi]$. Найдем производную y':

$$y'=\frac{1}{2}(3\sin 3x-\sin x).$$

На отрезке $[0, \pi]$ производная обращается в нуль в точках

$$x_1=0,\ x_2=\arccos\frac{1}{\sqrt{3}},\quad x_3=\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right),\quad x_4=\pi.$$

Подсчитаем значения функции в этих точках:

$$y(0)=y(\pi)=0,\quad y\left[\arccos\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right]=\pm\frac{4}{3\sqrt{3}}.$$

Следовательно, наименьшее значение функции в промежутке $(-\infty, \infty)$ равно $-4/(3\sqrt{3})$, а наибольшее равно $4/(3\sqrt{3})$.

3.7.3. Функция

$$f(x)=ax+\frac{b}{x}\qquad(a,\ b,\ x>0)$$

состоит из двух слагаемых: одно слагаемое пропорционально независимой переменной x, а другое — обратно пропорционально ей. Доказать, что такая функция достигает наименьшего значения при $x=\sqrt{b/a}$.

Решение. Найдем корни производной $f'(x)$ в $(0, \infty)$:

$$f'(x)=a-\frac{b}{x^2}=0$$

при $x=\sqrt{b/a}$ $(x>0)$. Так как $f''(x)=2b/x^3>0$ для любого $x>0$, то в этой критической точке функция $f(x)$ достигает минимума.

Этот экстремум (минимум) единственный в промежутке $(0, \infty)$. Значит, при $x=\sqrt{b/a}$ функция $f(x)$ достигает наименьшего значения.

3.7.4. При n измерениях неизвестной величины x получены числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Требуется найти, при каком значении x сумма квадратов погрешностей

$$f(x)=(x-x_1)^2+(x-x_2)^2+\ldots+(x-x_n)^2$$

будет наименьшей?

Решение. Вычислим производную

$$f'(x)=2(x-x_1)+2(x-x_2)+\ldots+2(x-x_n).$$

Единственный корень производной

$$x=\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}.$$

Далее для всех x имеем $f''(x)=2n>0$. Поэтому функция $f(x)$ достигает минимума в точке

$$x=\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}.$$

Этот минимум — единственный и совпадает с наименьшим значением функции (ср. **1.3.8**).

Итак, наилучшим в смысле «принципа наименьших квадратов» приближенным значением неизвестной величины x является среднее арифметическое значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

3.7.5. Найти наибольший член последовательности

$$a_n=\frac{n^2}{n^3+200}.$$

Решение. Рассмотрим функцию $f(x)=x^2/(x^3+200)$ в промежутке $[1, \infty)$. Так как производная

$$f'(x)=\frac{x(400-x^3)}{(x^3+200)^2}$$

положительна при $0<x<\sqrt[3]{400}$ и отрицательна при $x>\sqrt[3]{400}$, то функция $f(x)$ возрастает при $0<x<\sqrt[3]{400}$ и убывает при $x>\sqrt[3]{400}$. Из неравенства $7<\sqrt[3]{400}<8$ следует, что наибольшим членом последовательности может быть либо член a_7, либо член a_8. Так как $a_7=49/543>a_8=8/89$, то наибольшим членом последовательности является член

$$a_7=\frac{49}{543}.$$

3.7.6. Найти наибольшее и наименьшее значения функций на указанных отрезках:

а) $f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+2$ на отрезке $[-2, 4]$;

б) $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ на отрезке $[-2, 2]$;

в) $f(x)=\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\ln x$ на отрезке $\left[\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}\right]$;

г) $f(x)=2\sin x+\sin 2x$ на отрезке $\left[0, \frac{3}{2}\pi\right]$;

д) $f(x)=x-2\ln x$ на отрезке $[1, e]$;

е) $f(x)=\begin{cases} 2x^2+\frac{2}{x^2} & \text{для } -2\leqslant x<0;\quad 0<x\leqslant 2, \\ 1 & \text{для } x=0. \end{cases}$

§ 3.8. Решение задач геометрического и физического содержания

3.8.1. Сила действия кругового электрического тока на небольшой магнит, ось которого расположена на перпендикуляре к плоскости круга, проходящем через его центр, выражается формулой

$$F=\frac{Cx}{(a^2+x^2)^{3/2}},$$

где a — радиус круга; x — расстояние от центра круга до магнита $(0<x<\infty)$; C — постоянная.

При каком x величина F будет наибольшей?

Решение. Производная

$$F'(x)=C\frac{a^2-2x^2}{(a^2+x^2)^{5/2}}$$

имеет единственный положительный корень $x=a/\sqrt{2}$. Он и дает решение задачи.

Замечание. Часто соображения чисто физического или геометрического характера освобождают от необходимости прибегать к дифференциальным методам *исследования* вопроса о наличии наибольшего или наименьшего значения функции в исследуемой точке.

3.8.2. Определить размеры открытого бассейна с квадратным дном объемом 32 $м^3$ так, чтобы на облицовку его стен и дна пошло наименьшее количество материала.

Решение. Обозначим сторону основания через x, а высоту через y. Тогда объем V бассейна будет равен

$$V=x^2y=32, \qquad (*)$$

а облицовываемая поверхность S бассейна равна

$$S=x^2+4xy.$$