3.7.6. Найти наибольшее и наименьшее значения функций на указанных отрезках:

а) $f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+2$ на отрезке $[-2, 4]$;

б) $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ на отрезке $[-2, 2]$;

в) $f(x)=\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\ln x$ на отрезке $\left[\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}\right]$;

г) $f(x)=2\sin x+\sin 2x$ на отрезке $\left[0, \frac{3}{2}\pi\right]$;

д) $f(x)=x-2\ln x$ на отрезке $[1, e]$;

е) $f(x)=\begin{cases} 2x^2+\frac{2}{x^2} & \text{для } -2\leqslant x<0; \quad 0<x\leqslant 2, \\ 1 & \text{для } \quad x=0. \end{cases}$

§ 3.8. Решение задач геометрического и физического содержания

3.8.1. Сила действия кругового электрического тока на небольшой магнит, ось которого расположена на перпендикуляре к плоскости круга, проходящем через его центр, выражается формулой

$$F=\frac{Cx}{(a^2+x^2)^{3/2}},$$

где a — радиус круга; x — расстояние от центра круга до магнита $(0<x<\infty)$; C — постоянная.

При каком x величина F будет наибольшей?

Решение. Производная

$$F'(x)=C\frac{a^2-2x^2}{(a^2+x^2)^{5/2}}$$

имеет единственный положительный корень $x=a/\sqrt{2}$. Он и дает решение задачи.

Замечание. Часто соображения чисто физического или геометрического характера освобождают от необходимости прибегать к дифференциальным методам *исследования* вопроса о наличии наибольшего или наименьшего значения функции в исследуемой точке.

3.8.2. Определить размеры открытого бассейна с квадратным дном объемом 32 $м^3$ так, чтобы на облицовку его стен и дна пошло наименьшее количество материала.

Решение. Обозначим сторону основания через x, а высоту через y. Тогда объем V бассейна будет равен

$$V=x^2y=32, \qquad (*)$$

а облицовываемая поверхность S бассейна равна

$$S=x^2+4xy.$$

Выразив y через x из соотношения (*), получим

$$S = x^2 + 4x\frac{V}{x^2} = x^2 + \frac{128}{x}.$$

Исследуем полученную функцию на минимум в промежутке $(0, \infty)$:

$$S' = 2x - \frac{128}{x^2}; \quad 2x - \frac{128}{x^2} = 0; \quad x = 4.$$

Найденная единственная точка, очевидно, дает наименьшее значение функции S, так как наибольшего значения у нее нет (она неограниченно возрастает при $x \to 0$ и $x \to \infty$).

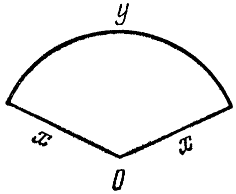

Рис. 42.

Итак, искомые размеры бассейна $x = 4$ *м*, $y = 2$ *м*.

3.8.3. В данный шар вписать цилиндр, имеющий наибольшую боковую поверхность.

3.8.4. Чтобы огородить клумбу, которая должна иметь форму кругового сектора, имеется кусок проволоки длиной 20 *м*. Какой следует взять радиус круга, чтобы площадь клумбы была наибольшей?

Решение. Обозначим радиус круга через x, а длину дуги сектора через y (рис. 42). Тогда

$$20 = 2x + y,$$

откуда

$$y = 2(10 - x).$$

Площадь кругового сектора равна $S = \frac{1}{2}xy = x(10 - x)$ $(0 \leqslant x \leqslant 10)$.

Производная $S'(x) = 10 - 2x$ имеет корень $x = 5$.

Так как наименьшее значение $S = 0$ достигается на концах отрезка $[0, 10]$, то полученное значение $x = 5$ дает наибольшую площадь S.

3.8.5. Требуется построить открытый цилиндрический резервуар вместимостью V_0. Материал имеет толщину d. Каковы должны быть размеры резервуара (радиус основания и высота), чтобы расход материала был наименьшим?

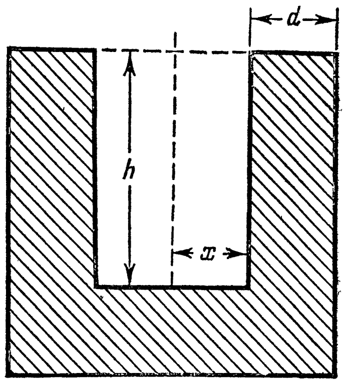

Рис. 43.

Решение. На рис. 43 изображен разрез резервуара.

Радиус основания внутреннего цилиндра обозначен через x, высота внутреннего цилиндра — через h. Объем дна и стенки резервуара равен

$$V = \pi(x + d)^2 d + \pi\left[(x + d)^2 - x^2\right]h = \pi d(x + d)^2 + \pi h(2xd + d^2). \qquad (*)$$

С другой стороны, по условию должно быть

$$V_0 = \pi x^2 h,$$

откуда

$$h = \frac{V_0}{\pi x^2}.$$

Подставляя в (*), получим

$$V = \pi d\,(x+d)^2 + \frac{\pi V_0}{\pi x^2}(2xd + d^2) = \pi d\,(x+d)^2 + \frac{2V_0 d}{x} + \frac{V_0 d^2}{x^2}.$$

Полученную функцию $V(x)$ нам нужно исследовать на экстремум при $x > 0$.

Имеем

$$V'(x) = 2\pi d\,(x+d) - \frac{2V_0 d}{x^2} - \frac{2V_0 d^2}{x^3} = \frac{2d\,(x+d)\,(\pi x^3 - V_0)}{x^3}.$$

Единственный положительный корень производной — это точка $x = \sqrt[3]{V_0/\pi}$. Она и дает решение задачи. При этом

$$h = \frac{V_0 \sqrt[3]{\pi^2}}{\pi \sqrt[3]{V_0^2}} = \sqrt[3]{\frac{V_0}{\pi}} = x.$$

3.8.6. Завод D нужно соединить шоссейной дорогой с прямолинейной железной дорогой, на которой расположен город A. Расстояние DB до железной дороги равно a, расстояние AB по железной дороге равно l. Стоимость перевозок по шоссе в m раз дороже стоимости перевозок по железной дороге ($m > 1$).

Как провести шоссе DP к железной дороге, чтобы стоимость перевозок от завода к городу была наименьшей?

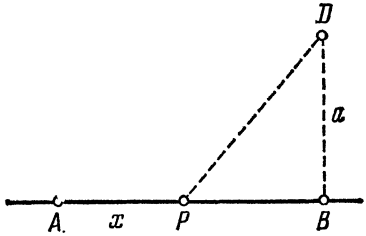

Рис. 44.

Решение. Сделаем чертеж (рис. 44). Прежде всего ясно, что шоссе тоже должно быть прямолинейным (прямая короче любой кривой, соединяющей данные две точки!). Кроме того, пункт P не может лежать левее точки A и правее точки B. Если расстояние AP обозначить через x, то это значит, что $0 \leqslant x \leqslant l$.

Пусть стоимость провоза по железной дороге (стоимость тонно-километра) k; тогда стоимость провоза по шоссе будет km. Общая стоимость N провоза из D в A равна

$$N = kx + km\sqrt{a^2 + (l-x)^2}.$$

Следовательно, нужно найти наименьшее значение функции

$$f(x) = x + m\sqrt{a^2 + (x-l)^2}, \qquad 0 \leqslant x \leqslant l.$$

Возьмем производную

$$f'(x)=1+\frac{m(x-l)}{\sqrt{a^2+(x-l)^2}}.$$

Она обращается в нуль только в одной точке,

$$x=l-\frac{a}{\sqrt{m^2-1}}.$$

Если эта точка лежит на отрезке $[0,\ l]$, т. е. если

$$l\geqslant\frac{a}{\sqrt{m^2-1}}\quad\text{или}\quad\frac{a}{l}\leqslant\sqrt{m^2-1},$$

то найденная точка дает наименьшую стоимость перевозок (что легко проверить). Если же указанное неравенство не соблюдается, то $f(x)$ возрастает в $[0,\ l]$ и поэтому наименьшая стоимость перевозок достигается при $x=0$.

3.8.7. При конструировании трансформатора переменного тока важно заполнить внутренность катушки железным крестообразным сердечником возможно большей площади. Каковы должны быть соответствующие размеры x, y сечения сердечника, если радиус катушки равен a (рис. 45).

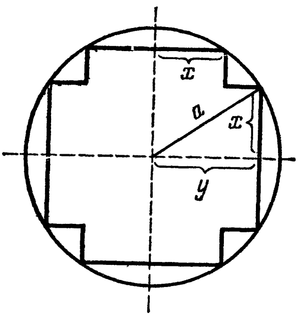

Рис. 45.

3.8.8. Если источником тока служит электрический элемент, то эффект P (*вт*), получающийся при включении в цепь сопротивления W (*ом*), выражается формулой

$$P=\frac{E^2W}{(W+W_i)^2},$$

где E (*в*) — электродвижущая сила, W_i (*ом*) — внутреннее сопротивление.

Найти наибольший эффект, который можно получить при данных E и W_i.

3.8.9. Банка данного объема V имеет форму цилиндра. Каково должно быть соотношение ее размеров (высота h и диаметр $2R$), чтобы на изготовление пошло минимальное количество жести?

3.8.10. Вписать в данный конус цилиндр с наибольшей боковой поверхностью, если плоскости и центры круговых оснований цилиндра и конуса совпадают.

3.8.11. В прямоугольной системе координат дана точка (1, 2). Провести через эту точку прямую линию так, чтобы она образовала вместе с положительными полуосями координат треугольник наименьшей площади.

3.8.12. На оси параболы $y^2=2px$ дана точка M на расстоянии a от вершины. Найти абсциссу ближайшей к ней точки кривой.

3.8.13. Стоимость плавания судна в течение часа выражается в рублях эмпирической формулой вида $a+bv^3$, где a и b — постоянные для данного судна, а v — скорость судна в узлах (узел равен 1,85 *км/час*). В этой формуле постоянная часть расхода a относится к амортизации и к содержанию команды, а второй член, bv^3, — к стоимости топлива. При какой скорости судно покроет любое требуемое расстояние с наименьшими затратами?

3.8.14. Из трех досок одинаковой ширины сколачивается желоб. При каком угле наклона боковых стенок площадь поперечного сечения желоба будет наибольшей?

3.8.15. Сосуд с вертикальной стенкой высоты h стоит на горизонтальной плоскости. Определить положение отверстия, при котором дальность струи будет наибольшая, если скорость вытекающей жидкости по закону Торричелли равна $\sqrt{2gx}$, где x — глубина расположения отверстия.

3.8.16. Два самолета летят в одной плоскости и прямолинейно под углом 120° с одинаковой скоростью v *км/час*. В некоторый момент один самолет пришел в точку пересечения линий движения, а второй не дошел до нее a *км*. Через сколько времени расстояние между самолетами будет наименьшим и чему равно это расстояние?

§ 3.9. Выпуклость и вогнутость кривых. Точки перегиба

Если $f''(x) < 0$ (> 0) в интервале (a, b), то в этом интервале кривая $y=f(x)$ выпукла (вогнута), т. е. лежит ниже (выше) любой своей касательной.

Если $f''(x_0)=0$ или не существует, но $f'(x_0)$ существует и вторая производная $f''(x)$ меняет знак при переходе через точку x_0, то точка $(x_0, f(x_0))$ является точкой перегиба кривой $y=f(x)$.

3.9.1. Найти интервалы вогнутости и выпуклости и точки перегиба графиков следующих функций:

а) $y=x^4+x^3-18x^2+24x-12$; б) $y=3x^4-8x^3+6x^2+12$;

в) $y=x/(1+x^2)$; г) $y=x+x^{5/3}$;

д) $y=4\sqrt{(x-1)^5}+20\sqrt{(x-1)^3}$ $(x \geqslant 1)$; е) $y=(\ln^2 x)/x$ $(x>0)$;

ж) $y=x\sin(\ln x)$ $(x>0)$; з) $y=2-|x^5-1|$.

Решение. а) Находим производные:

$$y' = 4x^3+3x^2-36x+24,$$

$$y'' = 12x^2+6x-36 = 12(x^2+x/2-3),$$

откуда $y''=0$ при $x_1=-2$, $x_2=3/2$.

Следовательно, $y''>0$ на интервалах $(-\infty, -2)$ и $(3/2, \infty)$; $y''<0$ на интервале $(-2, 3/2)$. Знак второй производной определяет, выпукла или вогнута кривая в данном интервале.