ные для данного судна, а v — скорость судна в узлах (узел равен 1,85 *км/час*). В этой формуле постоянная часть расхода a относится к амортизации и к содержанию команды, а второй член, bv^3, — к стоимости топлива. При какой скорости судно покроет любое требуемое расстояние с наименьшими затратами?

3.8.14. Из трех досок одинаковой ширины сколачивается желоб. При каком угле наклона боковых стенок площадь поперечного сечения желоба будет наибольшей?

3.8.15. Сосуд с вертикальной стенкой высоты h стоит на горизонтальной плоскости. Определить положение отверстия, при котором дальность струи будет наибольшая, если скорость вытекающей жидкости по закону Торричелли равна $\sqrt{2gx}$, где x — глубина расположения отверстия.

3.8.16. Два самолета летят в одной плоскости и прямолинейно под углом 120° с одинаковой скоростью v *км/час*. В некоторый момент один самолет пришел в точку пересечения линий движения, а второй не дошел до нее a *км*. Через сколько времени расстояние между самолетами будет наименьшим и чему равно это расстояние?

§ 3.9. Выпуклость и вогнутость кривых. Точки перегиба

Если $f''(x) < 0\ (> 0)$ в интервале $(a,\ b)$, то в этом интервале кривая $y = f(x)$ выпукла (вогнута), т. е. лежит ниже (выше) любой своей касательной.

Если $f''(x_0) = 0$ или не существует, но $f'(x_0)$ существует и вторая производная $f''(x)$ меняет знак при переходе через точку x_0, то точка $(x_0,\ f(x_0))$ является точкой перегиба кривой $y = f(x)$.

3.9.1. Найти интервалы вогнутости и выпуклости и точки перегиба графиков следующих функций:

а) $y = x^4 + x^3 - 18x^2 + 24x - 12$; б) $y = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 12$;

в) $y = x/(1+x^2)$; г) $y = x + x^{5/3}$;

д) $y = 4\sqrt{(x-1)^5} + 20\sqrt{(x-1)^3}\ (x \geqslant 1)$; е) $y = (\ln^2 x)/x\ (x > 0)$;

ж) $y = x \sin(\ln x)\quad (x > 0)$; з) $y = 2 - |x^5 - 1|$.

Решение. а) Находим производные:

$$y' = 4x^3 + 3x^2 - 36x + 24,$$

$$y'' = 12x^2 + 6x - 36 = 12(x^2 + x/2 - 3),$$

откуда $y'' = 0$ при $x_1 = -2$, $x_2 = 3/2$.

Следовательно, $y'' > 0$ на интервалах $(-\infty,\ -2)$ и $(3/2,\ \infty)$; $y'' < 0$ на интервале $(-2,\ 3/2)$. Знак второй производной определяет, выпукла или вогнута кривая в данном интервале.

Это позволяет составить следующую таблицу:

x	$x<-2$	$-2<x<\frac{3}{2}$	$x>\frac{3}{2}$
Знак y''	$+$	$-$	$+$
Вывод	Вогнутость	Выпуклость	Вогнутость

Поскольку при переходе через точки $x_1=-2$ и $x_2=3/2$ вторая производная меняет знак, точки $(-2,\ -124)$ и $\left(\frac{3}{2},\ -8\frac{1}{16}\right)$ являются точками перегиба.

г) Найдем производные:

$$y'=1+\frac{5}{3}x^{2/3},\qquad y''=\frac{10}{9\sqrt[3]{x}}.$$

Вторая производная нигде не равна нулю и теряет смысл в точке $x=0$. При $x<0$ имеем $y''<0$ и кривая выпукла, при $x>0$ имеем $y''>0$ и кривая вогнута.

В точке $x=0$ первая производная $y'=1$, вторая производная меняет знак при переходе через точку $x=0$. Поэтому точка $(0,\ 0)$ — точка перегиба.

ж) Найдем производные:

$$y'=\sin(\ln x)+\cos(\ln x),$$
$$y''=\frac{1}{x}[\cos(\ln x)-\sin(\ln x)]=\frac{\sqrt{2}}{x}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\ln x\right).$$

Вторая производная обращается в нуль в точках

$$x_k=e^{\pi/4+k\pi},\qquad k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$$

Функция $\sin(\pi/4-\ln x)$ при переходе через каждую точку x_k меняет знак, а вместе с ней меняет знак y''. Следовательно, точки x_k являются абсциссами точек перегиба. В интервалах

$$(e^{2k\pi-3\pi/4},\quad e^{2k\pi+\pi/4})$$

кривая вогнута, в интервалах

$$(e^{2k\pi+\pi/4},\quad e^{2k\pi+5\pi/4})$$

кривая выпукла.

з) Заданную функцию можно записать следующим образом:

$$y=\begin{cases}2-(x^5-1), & x\geqslant1,\\ 2+(x^5-1), & x<1.\end{cases}$$

Поэтому

$$y'=\begin{cases}-5x^4, & x>1,\\ 5x^4, & x<1.\end{cases}$$

В точке $x=1$ производная не существует. Далее,

$$y''=\begin{cases} -20x^3, & x>1, \\ 20x^3, & x<1; \end{cases}$$

$y''=0$ в точке $x=0$. Следовательно, исследованию подлежат три интервала $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$, $(1, \infty)$.

Составим таблицу знаков y'':

x	$x<0$	$0<x<1$	$x \geqslant 1$
Знак y''	$-$	$+$	$-$
Вывод	Выпуклость	Вогнутость	Выпуклость

Точка $(0, 1)$ является точкой перегиба, точка $(1, 2)$ является угловой точкой (точкой излома).

3.9.2. Каким условиям должны удовлетворять коэффициенты a, b, c, чтобы кривая $y=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ имела точки перегиба?

Решение. Найдем вторую производную:

$$y''=12ax^2+6bx+2c.$$

Кривая имеет точки перегиба тогда и только тогда, когда уравнение

$$6ax^2+3bx+c=0$$

имеет различные действительные корни, т. е. когда дискриминант $9b^2-24ac>0$ или

$$3b^2-8ac>0.$$

3.9.3. При каких значениях a кривая

$$y=x^4+ax^3+\frac{3}{2}x^2+1$$

будет вогнутой на всей числовой оси?

Решение. Найдем y'':

$$y''=12x^2+6ax+3.$$

Кривая будет вогнута на всей числовой оси, если $y''\geqslant 0$ для всех значений x, т. е. когда

$$4x^2+2ax+1\geqslant 0 \quad \text{при всех } x.$$

Для этого необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство $4a^2-16\leqslant 0$; отсюда

$$|a|\leqslant 2.$$

3.9.4. Показать, что кривая $y=(x+1)/(x^2+1)$ имеет три точки перегиба, лежащие на одной прямой.

Решение. Найдем производные:

$$y'=\frac{-x^2-2x+1}{(x^2+1)^2},$$

$$y''=\frac{2x^3+6x^2-6x-2}{(x^2+1)^3}.$$

Вторая производная обращается в нуль в трех точках, которые являются корнями уравнения

$$x^3+3x^2-3x-1=0,$$

откуда

$$x_1=-2-\sqrt{3},\quad x_2=-2+\sqrt{3},\quad x_3=1.$$

Составим таблицу знаков y'':

x	$-\infty<x<$ $<-2-\sqrt{3}$	$-2-\sqrt{3}<x<$ $<-2+\sqrt{3}$	$-2+\sqrt{3}<$ $<x<1$	$1<x<\infty$
Знак y''	$-$	$+$	$-$	$+$
Вывод	Выпуклость	Вогнутость	Выпуклость	Вогнутость

Следовательно, $(-2-\sqrt{3},\ -(\sqrt{3}-1)/4)$, $(-2+\sqrt{3},\ (1+\sqrt{3})/4)$, $(1,\ 1)$ являются точками перегиба. Легко проверить, что все они лежат на одной прямой. Действительно, координаты этих точек удовлетворяют соотношению $\frac{-2-\sqrt{3}-1}{-2+\sqrt{3}-1}=\frac{(1-\sqrt{3})/4-1}{(1+\sqrt{3})/4+1}$.

3.9.5. Исследовать на выпуклость, вогнутость и точки перегиба кривые, заданные следующими уравнениями:

а) $y=x-\sqrt[5]{(x-3)^2}$; б) $y=e^{\sin x}(-\pi/2\leqslant x\leqslant\pi/2)$.

3.9.6. Показать, что точки перегиба кривой $y=x\sin x$ лежат на кривой

$$y^2(4+x^2)=4x^2.$$

§ 3.10. Асимптоты

Прямая линия называется *асимптотой* для кривой $y=f(x)$, если расстояние от точки M, лежащей на кривой, до этой прямой стремится к нулю при движении точки M вдоль какой-нибудь ветви кривой в бесконечность.

Различают три вида асимптот: вертикальные, горизонтальные и наклонные.

Вертикальные асимптоты. Если хотя бы один из пределов функции $f(x)$ в точке a справа или слева равен бесконечности, то прямая $x=a$ — вертикальная асимптота.