3.9.4. Показать, что кривая $y=(x+1)/(x^2+1)$ имеет три точки перегиба, лежащие на одной прямой.

Решение. Найдем производные:

$$y'=\frac{-x^2-2x+1}{(x^2+1)^2},$$
$$y''=\frac{2x^3+6x^2-6x-2}{(x^2+1)^3}.$$

Вторая производная обращается в нуль в трех точках, которые являются корнями уравнения

$$x^3+3x^2-3x-1=0,$$

откуда

$$x_1=-2-\sqrt{3},\quad x_2=-2+\sqrt{3},\quad x_3=1.$$

Составим таблицу знаков y'':

x	$-\infty<x<$ $<-2-\sqrt{3}$	$-2-\sqrt{3}<x<$ $<-2+\sqrt{3}$	$-2+\sqrt{3}<$ $<x<1$	$1<x<\infty$
Знак y''	$-$	$+$	$-$	$+$
Вывод	Выпуклость	Вогнутость	Выпуклость	Вогнутость

Следовательно, $(-2-\sqrt{3},\ -(\sqrt{3}-1)/4)$, $(-2+\sqrt{3},\ (1+\sqrt{3})/4)$, $(1,\ 1)$ являются точками перегиба. Легко проверить, что все они лежат на одной прямой. Действительно, координаты этих точек удовлетворяют соотношению $\dfrac{-2-\sqrt{3}-1}{-2+\sqrt{3}-1}=\dfrac{(1-\sqrt{3})/4-1}{(1+\sqrt{3})/4+1}$.

3.9.5. Исследовать на выпуклость, вогнутость и точки перегиба кривые, заданные следующими уравнениями:

а) $y=x-\sqrt[5]{(x-3)^2}$; б) $y=e^{\sin x}(-\pi/2\leqslant x\leqslant\pi/2)$.

3.9.6. Показать, что точки перегиба кривой $y=x\sin x$ лежат на кривой

$$y^2(4+x^2)=4x^2.$$

§ 3.10. Асимптоты

Прямая линия называется *асимптотой* для кривой $y=f(x)$, если расстояние от точки M, лежащей на кривой, до этой прямой стремится к нулю при движении точки M вдоль какой-нибудь ветви кривой в бесконечность.

Различают три вида асимптот: вертикальные, горизонтальные и наклонные.

Вертикальные асимптоты. Если хотя бы один из пределов функции $f(x)$ в точке a справа или слева равен бесконечности, то прямая $x=a$ — вертикальная асимптота.

Горизонтальные асимптоты. Если $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=A$, то прямая $y=A$ — горизонтальная асимптота (правая при $x\to+\infty$ и левая при $x\to-\infty$).

Наклонные асимптоты. Если существуют пределы

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=k_1, \qquad \lim_{x\to+\infty}[f(x)-k_1x]=b_1,$$

то прямая $y=k_1x+b_1$ — наклонная (правая) асимптота.

Если существуют пределы

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=k_2 \quad \text{и} \quad \lim_{x\to-\infty}[f(x)-k_2x]=b_2,$$

то прямая $y=k_2x+b_2$ — наклонная (левая) асимптота. Горизонтальную асимптоту можно рассматривать как частный случай наклонной асимптоты при $k=0$.

3.10.1. Найти асимптоты кривых:

а) $y=\dfrac{5x}{x-3}$; б) $y=\dfrac{3x}{x-1}+3x$; в) $y=\dfrac{x}{x^2+1}$;

г) $y=\dfrac{1}{x}+4x^2$; д) $y=xe^{\frac{1}{x}}$; е) $y=\dfrac{3x}{2}\ln\left(e-\dfrac{1}{3x}\right)$;

ж) $y=\sqrt{1+x^2}+2x$; з) $y=\sqrt{1+x^2}\sin\dfrac{1}{x}$; и) $y=2\sqrt{x^2+4}$.

Решение. а) Кривая имеет вертикальную асимптоту $x=3$, так как

$$\lim_{x\to3\mp0} y=\lim_{x\to3\mp0}\frac{5x}{x-3}=\mp\infty$$

(точка $x=3$ есть точка разрыва второго рода).

Найдем горизонтальную асимптоту:

$$\lim_{x\to\pm\infty} y=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{5x}{x-3}=5.$$

Итак, кривая имеет вертикальную асимптоту $x=3$ и горизонтальную асимптоту $y=5$.

б) Кривая имеет вертикальную асимптоту $x=1$, так как

$$\lim_{x\to1-0} y=\lim_{x\to1-0}\left(\frac{3x}{x-1}+3x\right)=-\infty;$$

$$\lim_{x\to1+0} y=\lim_{x\to1+0}\left(\frac{3x}{x-1}+3x\right)=+\infty.$$

Ищем наклонные асимптоты:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{3}{x-1}+3\right)=3;$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(y-kx)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{3x}{x-1}+3x-3x\right)=3.$$

Итак, прямая $y=3x+3$ является наклонной асимптотой (рис. 46).

д) Кривая имеет вертикальную асимптоту $x=0$, так как

$$\lim_{x\to+0} y = \lim_{x\to+0} xe^{1/x} = \lim_{t=\frac{1}{x}\to+\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty$$

(см. **3.2.2**).

Ищем наклонные асимптоты:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} e^{1/x} = e^0 = 1;$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} (xe^{1/x} - x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{e^{1/x}-1}{1/x} = \lim_{1/x=z\to 0} \frac{e^z-1}{z} = 1.$$

Таким образом, прямая $y=x+1$ будет наклонной асимптотой кривой (рис. 47). Заметим, что

$$\lim_{x\to-0} y = \lim_{x\to-0} xe^{1/x} = 0.$$

е) Функция определена и непрерывна при $e - 1/(3x) > 0$, т. е. при $x < 0$ и $x > 1/(3e)$.

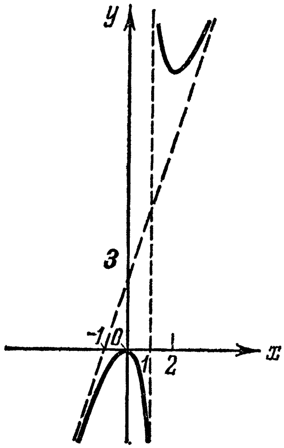

Рис. 46.

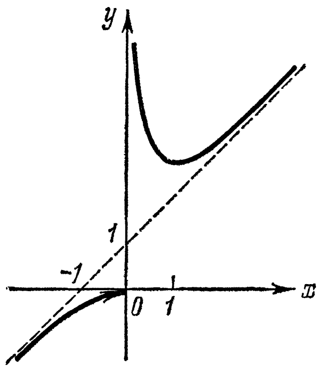

Рис. 47.

Поскольку функция непрерывна в каждой точке области определения, вертикальные асимптоты могут существовать только на конечных границах области определения.

При $x \to -0$ имеем

$$\lim_{x\to-0} y = \lim_{x\to-0} \frac{3x}{2} \ln\left(e - \frac{1}{3x}\right) = -\frac{1}{2} \lim_{z\to+\infty} \frac{\ln(e+z)}{z} = 0 \qquad \left(z = -\frac{1}{3x}\right)$$

(см. **3.2.2**), т. е. прямая $x=0$ не есть вертикальная асимптота.

При $x \to 1/(3e)+0$ имеем

$$\lim_{x\to 1/(3e)+0} y = \frac{3}{2}\lim_{x\to 1/(3e)+0} x\ln\left(e-\frac{1}{3x}\right) = -\infty,$$

т. е. прямая $x=1/(3e)$ есть вертикальная асимптота.

Найдем теперь наклонные асимптоты:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x} = \frac{3}{2}\lim_{x\to\pm\infty}\ln\left(e-\frac{1}{3x}\right) = \frac{3}{2};$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty}[y-kx] = \frac{3}{2}\lim_{x\to\pm\infty} x\left[\ln\left(e-\frac{1}{3x}\right)-1\right] =$$

$$= \frac{3}{2}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\ln(1-1/(3xe))}{1/x} = \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{3e}\right) = -\frac{1}{2e}.$$

Следовательно, прямая $y=3x/2-1/(2e)$ является наклонной асимптотой (рис. 48).

ж) Вертикальных асимптот кривая не имеет, так как функция непрерывна всюду. Будем искать наклонные асимптоты. Пределы

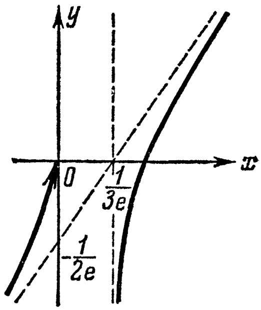

Рис. 48.

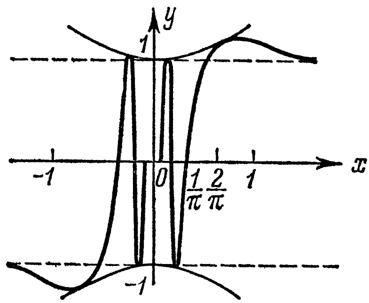

Рис. 49.

при $x\to+\infty$ и $x\to-\infty$ будут различными, поэтому надо рассмотреть отдельно два случая.

Найдем правую асимптоту (при $x\to+\infty$):

$$k_1 = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}+2x}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1/x^2+1}+2}{1} = 3;$$

$$b_1 = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+x^2}+2x-3x\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{1+x^2}-x\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{1+x^2-x^2}{\sqrt{1+x^2}+x} = 0.$$

Итак, при $x\to+\infty$ кривая имеет асимптоту $y=3x$.

Найдем левую асимптоту (при $x\to-\infty$):

$$k_2 = \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}+2x}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{1/x^2+1}+2x}{x} = 1,$$

$$b_2 = \lim_{x\to-\infty}\left[\sqrt{1+x^2}+2x-x\right] = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}-x} = 0,$$

так как в знаменателе оба слагаемых $\sqrt{1+x^2}$ и $(-x)$ положительны при $x<0$.

Итак, при $x \to -\infty$ кривая имеет асимптоту $y=x$.

з) Кривая вертикальных асимптот не имеет, поскольку она непрерывна при $x \neq 0$, а в окрестности точки $x=0$ функция ограничена.

Найдем наклонные асимптоты. Имеем

$$k=\lim_{x \to \pm\infty} \frac{y}{x}=\lim_{x \to \pm\infty} \frac{|x| \sqrt{1+1/x^2} \sin(1/x)}{x}=\pm 1 \cdot 0=0.$$

Далее,

$$b=\lim_{x \to \pm\infty}(y-kx)=\lim_{x \to \pm\infty}|x| \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} \sin\frac{1}{x}=\begin{cases} 1 \text{ при } x \to +\infty, \\ -1 \text{ при } x \to -\infty. \end{cases}$$

Итак, кривая имеет две горизонтальные асимптоты, $y=+1$ и $y=-1$ (рис. 49). Этот же результат можно получить из соображений симметрии относительно начала координат, заметив, что функция y нечетная.

3.10.2. Найти наклонную асимптоту графика функции $y=x^2/(1+x)$ при $x \to \infty$ и показать, что в интервале $(100, \infty)$ эту функцию с погрешностью, не превосходящей 0,01, можно заменить линейной функцией $y=x-1$.

Решение. Найдем наклонную асимптоту:

$$k=\lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{x(1+x)}=1;$$

$$b=\lim_{x \to \infty}\left(\frac{x^2}{1+x}-x\right)=-1.$$

Итак, уравнение асимптоты $y=x-1$.

Составим разность:

$$\delta=\frac{x^2}{1+x}-(x-1)=\frac{1}{1+x}.$$

Следовательно, приняв

$$y=\frac{x^2}{1+x} \approx x-1,$$

мы для всех $x>100$ сделаем ошибку, не превосходящую 0,01.

3.10.3. Найти асимптоты кривых:

а) $y=\dfrac{x^2-6x+3}{x-3}$; б) $y=x \operatorname{arctg} x$;

в) $y=x+(\sin x)/x$; г) $y=\ln(4-x^2)$;

д) $y=2x-\arccos(1/x)$.

§ 3.11. Общее исследование функции

Об исследовании функций и построении графиков элементарными приемами говорилось выше (гл. I, §§ 1.3, 1.5). Теперь, пользуясь средствами дифференциального исчисления, мы можем провести более глубокое и разностороннее изучение свойств функции и обосновать характерные качественные ее особенности (возрастание, убывание, выпуклость и т. д.).