так как в знаменателе оба слагаемых $\sqrt{1+x^2}$ и $(-x)$ положительны при $x<0$.

Итак, при $x\to-\infty$ кривая имеет асимптоту $y=x$.

з) Кривая вертикальных асимптот не имеет, поскольку она непрерывна при $x\neq 0$, а в окрестности точки $x=0$ функция ограничена.

Найдем наклонные асимптоты. Имеем

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{|x|\sqrt{1+1/x^2}\sin(1/x)}{x}=\pm 1\cdot 0=0.$$

Далее,

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(y-kx)=\lim_{x\to\pm\infty}|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\sin\frac{1}{x}=\begin{cases}1 \text{ при } x\to+\infty,\\ -1 \text{ при } x\to-\infty.\end{cases}$$

Итак, кривая имеет две горизонтальные асимптоты, $y=+1$ и $y=-1$ (рис. 49). Этот же результат можно получить из соображений симметрии относительно начала координат, заметив, что функция y нечетная.

3.10.2. Найти наклонную асимптоту графика функции $y=x^2/(1+x)$ при $x\to\infty$ и показать, что в интервале $(100, \infty)$ эту функцию с погрешностью, не превосходящей 0,01, можно заменить линейной функцией $y=x-1$.

Решение. Найдем наклонную асимптоту:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x(1+x)}=1;$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{1+x}-x\right)=-1.$$

Итак, уравнение асимптоты $y=x-1$.

Составим разность:

$$\delta=\frac{x^2}{1+x}-(x-1)=\frac{1}{1+x}.$$

Следовательно, приняв

$$y=\frac{x^2}{1+x}\approx x-1,$$

мы для всех $x>100$ сделаем ошибку, не превосходящую 0,01.

3.10.3. Найти асимптоты кривых:

а) $y=\dfrac{x^2-6x+3}{x-3}$; б) $y=x\operatorname{arctg}x$;

в) $y=x+(\sin x)/x$; г) $y=\ln(4-x^2)$;

д) $y=2x-\arccos(1/x)$.

§ 3.11. Общее исследование функции

Об исследовании функций и построении графиков элементарными приемами говорилось выше (гл. I, §§ 1.3, 1.5). Теперь, пользуясь средствами дифференциального исчисления, мы можем провести более глубокое и разностороннее изучение свойств функции и обосновать характерные качественные ее особенности (возрастание, убывание, выпуклость и т. д.).

Общее исследование функций и построение их графиков удобно выполнять по следующей схеме.

1. Найти область определения функции.

2. Выяснить, не является ли функция четной, нечетной или периодической.

3. Исследовать функцию на непрерывность, найти точки разрыва и выяснить характер разрывов.

4. Найти асимптоты графика функции.

5. Найти точки экстремума функции, вычислить значения функции в этих точках. Установить интервалы монотонности функции.

6. Найти точки перегиба графика функции, вычислить значения функции и значения производной в этих точках.

Установить интервалы выпуклости графика функции.

7. Используя результаты исследования, построить график функции. При необходимости уточнить отдельные участки кривой, можно вычислить координаты нескольких дополнительных точек (в частности, координаты точек пересечения с осями координат).

Указанную схему следует рассматривать как сугубо примерную. В частности, *эскиз* графика рекомендуется набрасывать уже после нахождения асимптот (если они имеются) и во всяком случае до нахождения точек перегиба. Однако следует помнить, что основными ориентирами при построении графика функции являются точки кривой, соответствующие экстремальным значениям функции, точки перегиба, асимптоты.

3.11.1. Провести полное исследование функций и построить их графики:

а) $y=x^6-3x^4+3x^2-5$; б) $y=\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x+1}$;

в) $y=\frac{2x^3}{x^2-4}$; г) $y=\frac{1-x^3}{x^2}$;

д) $y=x+\ln(x^2-1)$; е) $y=\frac{1}{2}\sin 2x+\cos x$;

ж) $y=x^2e^{1/x}$; з) $y=\arcsin\frac{1-x^2}{1+x^2}$.

Решение. а) Функция определена и непрерывна на всей числовой оси. Поэтому вертикальных асимптот кривая не имеет. Функция четная, так как $f(-x)=f(x)$. Следовательно, ее график симметричен относительно оси Oy, поэтому достаточно исследовать функцию только в промежутке $[0, \infty)$.

Наклонных асимптот нет, так как при $x\to\infty$ величина y является бесконечно большой величиной шестого порядка относительно x.

Исследуем первую производную:

$$y'=6x^5-12x^3+6x=6x(x^4-2x^2+1)=6x(x^2-1)^2;$$

критические точки:

$$x_1=-1, \quad x_2=0, \quad x_3=1.$$

Так как в промежутке $[0, \infty)$ производная $y'\geqslant 0$, то функция возрастает.

Исследуем вторую производную:

$$y''=30x^4-36x^2+6=6(5x^4-6x^2+1).$$

Положительные корни второй производной

$$x_1 = 1/\sqrt{5}, \qquad x_2 = 1.$$

Для удобства и наглядности исследования составим следующую таблицу, в которой все интересующие нас точки x расположены в порядке возрастания:

x	0	$\left(0, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{5}}$	$\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 1\right)$	1	$(1, \infty)$	2
y'	0	$+$	$\frac{96}{25\sqrt{5}} \approx 1{,}7$	$+$	0	$+$	
y''	6	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	-5		$-4{,}51$		-4		23

Справа подсчитано еще одно дополнительное значение функции для уточнения графика после точки перегиба.

Используя результаты исследования и эту таблицу и учитывая симметрию, строим график функции (рис. 50). Из графика видно, что функция имеет корни $x = \pm a$, где $a \approx 1{,}6$.

Рис. 50.

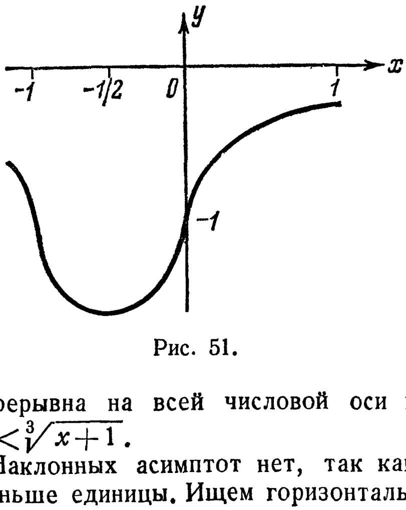


Рис. 51.

б) Функция определена и непрерывна на всей числовой оси и всюду отрицательна, так как $\sqrt[3]{x} < \sqrt[3]{x+1}$.

Вертикальных асимптот нет. Наклонных асимптот нет, так как при $x \to \infty$ порядок величины y меньше единицы. Ищем горизонтальную асимптоту:

$$\lim_{x\to\pm\infty} y = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x+1}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x(x+1)}+\sqrt[3]{(x+1)^2}}=0.$$

Следовательно, прямая $y=0$ является горизонтальной асимптотой графика.

Первая производная

$$y'=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}-\frac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}}=\frac{\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{x^2}}{3\sqrt[3]{x^2(x+1)^2}}$$

обращается в нуль в точке $x_2=-1/2$ и обращается в бесконечность в точках $x_1=-1$, $x_3=0$.

Вторая производная

$$y''=\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)\frac{1}{\sqrt[3]{x^5}}-\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)\frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^5}}=-\frac{2\left[\sqrt[3]{(x+1)^5}-\sqrt[3]{x^5}\right]}{9\sqrt[3]{[x(x+1)]^5}}$$

в нуль не обращается, бесконечна в тех же точках $x_1=-1$, $x_3=0$.

Составляем таблицу:

x	-1	$\left(-1,\ -\frac{1}{2}\right)$	$-\frac{1}{2}$	$\left(-\frac{1}{2},\ 0\right)$	0	$(0,\ \infty)$	1
y'	$-\infty$	$-$	0	$+$	∞	$+$	
y''	∞	$+$	$+\frac{16}{9\sqrt[3]{2}}$	$+$	∞	$-$	
y	-1		$-\sqrt[3]{4}$		-1		$-0{,}26$

С помощью этой таблицы и асимптоты $y=0$ строим график (рис. 51).

в) Функция определена и непрерывна на всей оси, кроме точек $x=\pm 2$. Функция нечетна, ее график симметричен относительно начала координат, поэтому достаточно исследовать функцию в промежутке $[0,\infty)$.

Прямая $x=2$ является вертикальной асимптотой:

$$\lim_{x\to 2-0}\frac{2x^3}{x^2-4}=-\infty;\qquad \lim_{x\to 2+0}\frac{2x^3}{x^2-4}=+\infty.$$

Ищем наклонную асимптоту:

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{x^2-4}=2,$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(y-2x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{8x}{x^2-4}=0.$$

Кривая имеет наклонную асимптоту $y=2x$, причем

$$y-2x=\frac{8x}{x^2-4}\begin{cases}>0 \text{ при } x>2,\\ <0 \text{ при } x<2.\end{cases}$$

Первая производная

$$y'=\frac{6x^2(x^2-4)-4x^4}{(x^2-4)^2}=\frac{2x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2}$$

в промежутке $[0, \infty)$ обращается в нуль в точках

$$x=0, \qquad x=2\sqrt{3}\approx 3{,}46$$

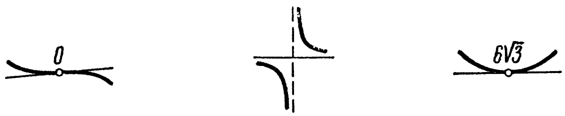
и обращается в бесконечность в точке $x=2$.

Вторая производная

$$y''=\frac{16x(x^2+12)}{(x^2-4)^3}$$

обращается в нуль в точке $x=0$ и в бесконечность при $x=2$.

Составляем таблицу:

x	0	$(0,\ 2)$	2	$(2,\ 2\sqrt{3})$	$2\sqrt{3}$	$(2\sqrt{3},\ \infty)$
y'	-0	$-$	∞	$-$	0	$+$
y''	$+0$	$-$	∞	$+$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$+$
y						

Используя результаты исследования, строим график (рис. 52).

д) Функция определена и непрерывна при всех значениях x, для которых $x^2-1>0$ или $|x|>1$, т. е. на двух интервалах $(-\infty, -1)$, $(1, +\infty)$.

Ищем вертикальные асимптоты:

$$\lim_{x \to -1-0} y = \lim_{x \to -1-0} [x + \ln(x^2 - 1)] = -\infty;$$
$$\lim_{x \to 1+0} y = \lim_{x \to 1+0} [x + \ln(x^2 - 1)] = -\infty.$$

Таким образом, кривая имеет две вертикальные асимптоты:

$$x = -1 \quad \text{и} \quad x = +1.$$

Ищем наклонные асимптоты

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x + \ln(x^2 - 1)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \left[1 + \frac{\ln(x^2 - 1)}{x}\right] = 1,$$
$$b = \lim_{x \to \pm\infty} [y - x] = \lim_{x \to \pm\infty} \ln(x^2 - 1) = +\infty.$$

Следовательно, ни наклонных, ни горизонтальных асимптот нет.

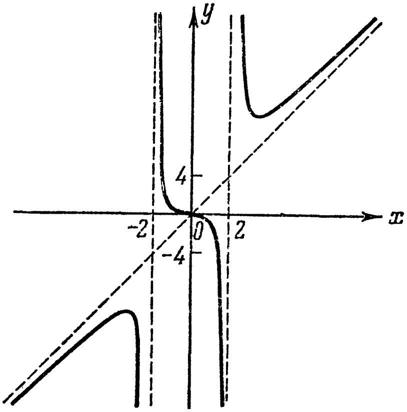


Рис. 52.

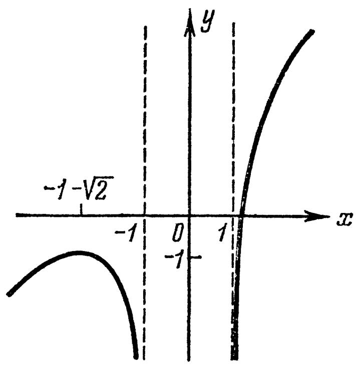


Рис. 53.

Поскольку производная

$$y' = 1 + \frac{2x}{x^2 - 1}$$

существует и конечна во всех точках области определения функции, то критическими точками могут быть лишь нули производной:

$$x_1 = -1 - \sqrt{2}; \qquad x_2 = -1 + \sqrt{2}.$$

В точке $x_2 = -1 + \sqrt{2}$ функция не определена; следовательно, имеется одна критическая точка $x_1 = -1 - \sqrt{2}$, принадлежащая интервалу $(-\infty, -1)$. В интервале $(1, \infty)$ производная $y' > 0$ и функция возрастает.

Вторая производная

$$y'' = -\frac{2(x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^2} < 0,$$

следовательно, кривая везде выпукла и в точке

$$x_1 = -1 - \sqrt{2} \approx -2{,}41$$

функция имеет максимум

$$y(-1-\sqrt{2}) = -1-\sqrt{2} + \ln(2+2\sqrt{2}) \approx -0{,}84.$$

Для уточнения графика в интервале $(1, \infty)$, где нет никаких характерных точек, выбраны дополнительные точки:

$$x=2; \quad y=2+\ln 3 \approx 3{,}10 \quad \text{и} \quad x=1{,}2; \quad y=1{,}2+\ln 0{,}44 \approx 0{,}38.$$

График функции показан на рис. 53.

е) Функция определена и непрерывна на всей числовой оси и имеет период 2π. Поэтому при исследовании можно ограничиться отрезком $[0, 2\pi]$. Асимптот нет в силу непрерывности и периодичности.

Находим первую производную:

$$y' = \cos 2x - \sin x.$$

На отрезке $[0, 2\pi]$ она имеет три корня:

$$x_1 = \pi/6, \quad x_2 = 5\pi/6, \quad x_3 = 3\pi/2.$$

Вычислим вторую производную:

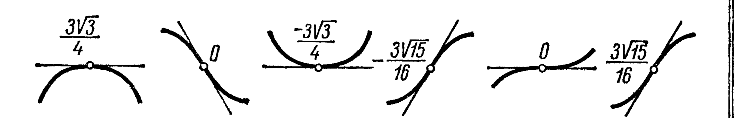
$$y'' = -2\sin 2x - \cos x.$$

На отрезке $[0, 2\pi]$ она имеет четыре корня:

$$x_1 = \pi/2, \quad x_2 = \pi + \arcsin(1/4), \quad x_3 = 3\pi/2, \quad x_4 = 2\pi - \arcsin(1/4).$$

Составим таблицу исследования всех критических точек первой и второй производных (в таблицу включаем и концы отрезка $[0, 2\pi]$).

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	x_2	$\left(x_2, \frac{3\pi}{2}\right)$	$\frac{3\pi}{2}$	$\left(\frac{3\pi}{2}, x_4\right)$	x_4	$(x_4, 2\pi)$	2π
y'		0	-2	0	$1\frac{1}{8}$		0		$1\frac{1}{8}$		
y''		$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$	0	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	1	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	0	$-\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$-\frac{3\sqrt{15}}{16}$		0		$\frac{3\sqrt{15}}{16}$		1



Ввиду того, что в интервале $(0, 3\pi/2)$ корни первой и второй производных перемежаются, знаки второй производной в интервалах между ее критическими точками указаны только в трех последних интервалах.

Результаты исследования позволяют построить график функции (рис. 54).

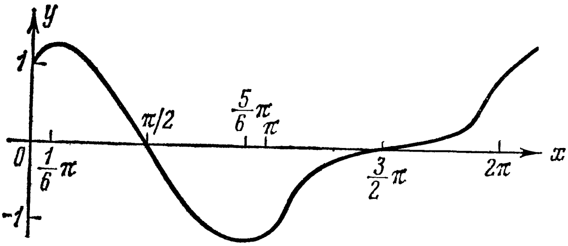


Рис. 54.

ж) Функция определена, положительна и непрерывна на каждом из интервалов $(-\infty, 0)$ и $(0, \infty)$. Точка $x=0$ есть точка разрыва. Так как (см. **3.2.2**)

$$\lim_{x\to+0} y = \lim_{x\to+0} x^2 e^{1/x} = \lim_{t\to+\infty} \frac{e^t}{t^2} = \infty \qquad \left(t = \frac{1}{x}\right),$$

то прямая $x=0$ является вертикальной асимптотой. Но

$$\lim_{x\to-0} y = \lim_{x\to-0} x^2 e^{1/x} = 0.$$

Наклонных асимптот нет, так как при $x \to \pm\infty$ функция $y = x^2 e^{1/x}$ имеет второй порядок малости относительно x. Найдем экстремумы функции. Для этого вычислим производную:

$$y' = 2xe^{1/x} - e^{1/x} = 2e^{1/x}(x - 1/2).$$

Отсюда находим единственную критическую точку $x = 1/2$. Так как при $x \neq 0$

$$y''(x) = 2e^{1/x} - \frac{2}{x} e^{1/x} + \frac{1}{x^2} e^{1/x} =$$

$$= \frac{1}{x^2} e^{1/x}(2x^2 - 2x + 1) > 0,$$

то на каждом из промежутков области определения график функции вогнут, и в точке $x = 1/2$ функция имеет минимум

$$y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} e^2 \approx 1,87.$$

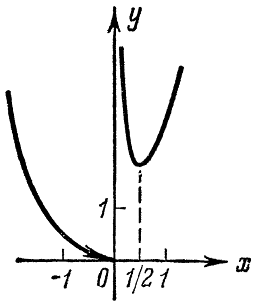


Рис. 55.

По результатам исследования строим график (рис. 55). Для уточнения графика в интервалах $(-\infty, 0)$ и $(1/2, \infty)$ использованы дополнительные точки

$$x = -1, \quad y = e^{-1} \approx 0,37; \quad x = 1, \quad y = e \approx 2,72.$$

з) Функция определена и непрерывна на всей числовой оси, так как при любом x

$$\left|\frac{1-x^2}{1+x^2}\right| \leqslant 1.$$

Учитывая четность функции, мы можем ограничиться исследованием функции при $x \geqslant 0$.

Вертикальных асимптот нет в силу непрерывности. Горизонтальная асимптота есть:

$$\lim_{x \to +\infty} y = \arcsin(-1) = -\pi/2.$$

Первая производная

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-(1-x^2)^2/(1+x^2)^2}} \cdot \frac{-2x(1+x^2)-2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2} = -\frac{1}{2|x|} \cdot \frac{4x}{(1+x^2)^2}$$

при $x > 0$ отрицательна, поэтому функция убывает.

В точке $x=0$ производная не существует. В силу симметрии графика относительно оси Oy в точке $x=0$ будет максимум $y(0)=\pi/2$. Заметим, что в точке $x=0$ правая производная равна -1, а левая равна $+1$.

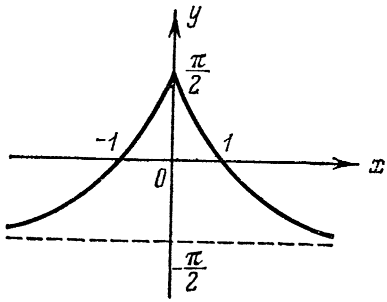


Рис. 56.

Вторая производная положительна:

$$y''(x) = 2\frac{2(1+x^2)2x}{(1+x^2)^4} = \frac{8x}{(1+x^2)^3} > 0$$

для всех $x > 0$.

Следовательно, график функции в промежутке $(0, \infty)$ вогнут.

Дополнительно заметим, что кривая пересекает ось Ox в точках $x = \pm 1$.

Учитывая все сказанное, строим график функции (рис. 56).

3.11.2. Провести полное исследование функций и построить их графики:

а) $y = 1 + x^2 - x^4/2$; б) $y = x^4/(1+x)^3$;

в) $y = 1/x + 4x^2$; г) $y = x^3/(x^2-1)$;

д) $y = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x^2-4}$;

е) $y = x^2 \ln(x+2)$; ж) $y = x^3 e^{-4x}$;

з) $y = \begin{cases} x \operatorname{arctg} 1/x & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0. \end{cases}$

§ 3.12. Приближенное решение алгебраических и трансцендентных уравнений

Приближенное нахождение изолированных действительных корней уравнения $f(x)=0$ обычно складывается из двух этапов:

1. Отделение корней, т. е. установление промежутков $[\alpha, \beta]$, в которых содержится один и только один корень уравнения.

2. Уточнение корней, т. е. вычисление их с заданной степенью точности.

Процесс отделения корней начинается с установления знаков функции $f(x)$ в ряде точек $x=\alpha_1, \alpha_2, \ldots,$ выбор которых учитывает особенности функции $f(x)$.