Учитывая четность функции, мы можем ограничиться исследованием функции при $x \geqslant 0$.

Вертикальных асимптот нет в силу непрерывности. Горизонтальная асимптота есть:

$$\lim_{x \to +\infty} y = \arcsin(-1) = -\pi/2.$$

Первая производная

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-(1-x^2)^2/(1+x^2)^2}} \cdot \frac{-2x(1+x^2)-2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2} = -\frac{1}{2|x|} \cdot \frac{4x}{(1+x^2)^2}$$

при $x > 0$ отрицательна, поэтому функция убывает.

В точке $x=0$ производная не существует. В силу симметрии графика относительно оси Oy в точке $x=0$ будет максимум $y(0)=\pi/2$. Заметим, что в точке $x=0$ правая производная равна -1, а левая равна $+1$.

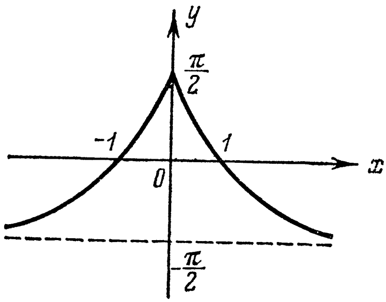

Рис. 56.

Вторая производная положительна:

$$y''(x) = 2\frac{2(1+x^2)2x}{(1+x^2)^4} = \frac{8x}{(1+x^2)^3} > 0$$

для всех $x > 0$.

Следовательно, график функции в промежутке $(0, \infty)$ вогнут.

Дополнительно заметим, что кривая пересекает ось Ox в точках $x = \pm 1$.

Учитывая все сказанное, строим график функции (рис. 56).

3.11.2. Провести полное исследование функций и построить их графики:

а) $y = 1 + x^2 - x^4/2$; б) $y = x^4/(1+x)^3$;

в) $y = 1/x + 4x^2$; г) $y = x^3/(x^2-1)$;

д) $y = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x^2-4}$;

е) $y = x^2 \ln(x+2)$; ж) $y = x^3 e^{-4x}$;

з) $y = \begin{cases} x \operatorname{arctg} 1/x & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0. \end{cases}$

§ 3.12. Приближенное решение алгебраических и трансцендентных уравнений

Приближенное нахождение изолированных действительных корней уравнения $f(x)=0$ обычно складывается из двух этапов:

1. Отделение корней, т. е. установление промежутков $[\alpha, \beta]$, в которых содержится один и только один корень уравнения.

2. Уточнение корней, т. е. вычисление их с заданной степенью точности.

Процесс отделения корней начинается с установления знаков функции $f(x)$ в ряде точек $x=\alpha_1, \alpha_2, \ldots,$ выбор которых учитывает особенности функции $f(x)$.

Если окажется, что $f(\alpha_k)\, f(\alpha_{k+1}) < 0$, то в силу свойства непрерывной функции в интервале (α_k, α_{k+1}) имеется корень уравнения $f(x)=0$.

Действительные корни уравнения можно также определить графически, как абсциссы точек пересечения графика функции $y=f(x)$ с осью Ox. Если уравнение не имеет близких между собой корней, то этим способом его корни легко отделяются. На практике часто бывает выгодно заменить данное уравнение равносильным ему уравнением

$$\psi_1(x)=\psi_2(x),$$

где функции $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$ более простые, чем функция $f(x)$. Построив графики функций $y=\psi_1(x)$ и $y=\psi_2(x)$, найдем искомые корни, как абсциссы точек пересечения этих графиков.

Методы уточнения корня. 1. *Метод хорд.* Если на отрезке $[a, b]$ находится единственный действительный корень ξ уравнения $f(x)=0$ и на этом отрезке $f(x)$ непрерывна, то первое приближение x_1 находится по формуле

$$x_1=a-\frac{f(a)}{f(b)-f(a)}(b-a).$$

Для получения второго приближения x_2 аналогичную формулу применяют к тому из отрезков $[a, x_1]$ или $[x_1, b]$, на концах которого $f(x)$ имеет значения противоположных знаков. Процесс этот продолжают до получения требуемой точности, о чем судят по длине последнего полученного отрезка.

2. *Метод касательных (метод Ньютона).* Если $f(a)\,f(b) < 0$, причем $f'(x)$ и $f''(x)$ отличны от нуля и сохраняют определенные знаки при $a\leqslant x\leqslant b$, то, исходя из начального приближения x_0 ($x_0\in[a, b]$), для которого $f(x_0)\,f''(x_0) > 0$, получают все последующие приближения к корню ξ по формулам

$$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)},\quad x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)},\ \ldots,\ x_n=x_{n-1}-\frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}.$$

Для оценки абсолютной погрешности n-го приближения можно воспользоваться общей формулой

$$|\xi-x_n|\leqslant\frac{|f(x_n)|}{m_1},$$

где

$$m_1=\min_{a\leqslant x\leqslant b}|f'(x)|.$$

При указанных выше условиях метод хорд и метод касательных дают приближение к корню с разных сторон. Поэтому обычно бывает выгодно комбинировать их, т. е. применять оба метода одновременно, благодаря чему уточнение корня может быть получено быстрее и создается возможность контролировать вычисления. Вычисление приближений $x_1, x_2, \ldots, x_n$, вообще говоря, следует производить до тех пор, пока перестанут изменяться сохраняемые нами в ответе десятичные знаки (в соответствии с заданной степенью точности!). Для промежуточных выкладок надлежит брать один-два запасных знака.

3. *Метод итерации.* Уравнение $f(x)=0$ сначала приводят к виду $x=\varphi(x)$, где $|\varphi'(x)|\leqslant q < 1$ ($q=\text{const}$) при $a\leqslant x\leqslant b$. Исходя из любого начального значения $x_0\in[a, b]$, вычисляют последовательные приближения к корню ξ по формулам $x_1=\varphi(x_0)$, $x_2=\varphi(x_1)$, $\ldots$, $x_n=\varphi(x_{n-1})$. Для оценки абсолютной погрешности n-го приближения x_n можно воспользоваться формулами

$$|\xi-x_n|\leqslant\frac{q}{1-q}|x_{n-1}-x_n|,$$

если приближения x_{n-1} и x_n лежат по одну сторону от корня, и

$$|\xi-x_n|\leqslant\frac{q}{1+q}|x_{n-1}-x_n|,$$

если приближения x_{n-1} и x_n лежат по разные стороны от корня.

3.12.1. Отделить корни уравнения

$$f(x) \equiv x^3 - 6x + 2 = 0.$$

Решение. Составляем таблицу знаков $f(x)$ в некоторых выбранных точках:

x	$f(x)$	x	$f(x)$
$-\infty$	$-$	1	$-$
-3	$-$	3	$+$
-1	$+$	$+\infty$	$+$
0	$+$		

Из этой таблицы заключаем, что уравнение имеет три действительных корня, лежащих в интервалах $(-3, -1)$, $(0, 1)$ и $(1, 3)$.

3.12.2. Определить число действительных корней уравнения

$$f(x) \equiv x + e^x = 0.$$

Решение. Так как $f'(x) = 1 + e^x > 0$; $f(-\infty) = -\infty$; $f(+\infty) = +\infty$, то данное уравнение имеет только один действительный корень.

3.12.3. Приближенным значением корня уравнения $f(x) \equiv x^4 - x - 1 = 0$ является $\bar{x} = 1{,}22$. Оценить абсолютную погрешность этого корня.

Решение. Имеем $f(\bar{x}) = 2{,}2153 - 1{,}22 - 1 = -0{,}0047$.

Так как при $x = 1{,}23$ получаем

$$f(x) = 2{,}2888 - 1{,}23 - 1 = 0{,}0588,$$

то корень ξ содержится в интервале $(1{,}22;\ 1{,}23)$. Производная $f'(x) = 4x^3 - 1$ монотонно возрастает. Поэтому ее наименьшим значением в данном интервале является

$$m_1 = 4 \cdot 1{,}22^3 - 1 = 4 \cdot 1{,}816 - 1 = 6{,}264.$$

Отсюда получим оценку погрешности

$$|\bar{x} - \xi| \leqslant \frac{|f(\bar{x})|}{m_1} = \frac{0{,}0047}{6{,}264} \approx 0{,}00075 < 0{,}001.$$

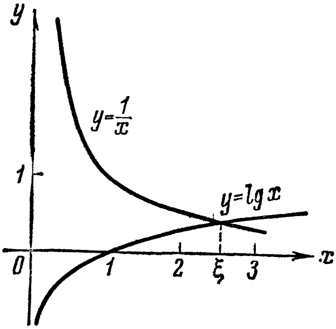

Рис. 57.

3.12.4. Решить графически уравнение

$$x \lg x - 1 = 0.$$

Решение. Запишем уравнение в виде

$$\lg x = 1/x.$$

Здесь $\psi_1(x) = \lg x$, $\psi_2(x) = 1/x$. Для этих функций имеются таблицы значений, что упрощает построение их графиков.

Построив графики $y = \lg x$ и $y = 1/x$ (рис. 57), приближенно найдем единственный корень $\xi \approx 2{,}5$.

3.12.5. Найти действительный корень уравнения

$$f(x) \equiv x^3 - 2x^2 + 3x - 5 = 0$$

с точностью до 10^{-4}:

а) по методу хорд,

б) по методу касательных.

Решение. Убедимся сначала, что данное уравнение имеет только один действительный корень. Это следует из того, что производная

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 3 > 0.$$

Далее, из $f(1) = -3 < 0$, $f(2) = 1 > 0$ следует, что у заданного многочлена имеется единственный положительный корень, лежащий в интервале $(1, 2)$.

а) По методу хорд получим первое приближение:

$$x_1 = 1 - \frac{-3}{4} \cdot 1 = 1{,}75.$$

Так как

$$f(1{,}75) = -0{,}5156 < 0,$$

а $f(2) = 1 > 0$, то $1{,}75 < \xi < 2$.

Второе приближение:

$$x_2 = 1{,}75 + \frac{0{,}5156}{1{,}5156} \cdot 0{,}25 = 1{,}75 + 0{,}0850 = 1{,}8350.$$

Так как $f(1{,}835) = -0{,}05059 < 0$, то $1{,}835 < \xi < 2$.

Процесс сходится весьма медленно. Попробуем сузить интервал, учитывая, что значение функции $f(x)$ в точке $x_2 = 1{,}835$ значительно меньше по абсолютной величине, чем $f(2)$. Имеем

$$f(1{,}9) = 0{,}339 > 0.$$

Следовательно, $1{,}835 < \xi < 1{,}9$.

Применяя к интервалу $(1{,}835;\ 1{,}9)$ метод хорд получим новое приближение:

$$x_3 = 1{,}835 - \frac{-0{,}05059}{0{,}339 + 0{,}05059} \cdot 0{,}065 = 1{,}8434.$$

Дальнейшие вычисления по методу хорд дают

$$x_4 = 1{,}8437, \qquad x_5 = 1{,}8438,$$

и так как $f(1{,}8437) < 0$, а $f(1{,}8438) > 0$, то с требуемой точностью 10^{-4} можно считать

$$\xi \approx 1{,}8438.$$

б) Для метода касательных в качестве начального приближения выбираем $x_0=2$, так как $f(2)=1>0$ и $f''(x)=6x-4>0$ в интервале $(1, 2)$. Первая производная $f'(x)=3x^2-4x+3$ тоже сохраняет знак в интервале $(1, 2)$, так что метод касательных применим.

Первое приближение

$$x_1=2-1/7=1,857.$$

Второе приближение:

$$x_2=1,857-\frac{f(1,857)}{f'(1,857)}=1,857-\frac{0,0779}{5,9275}=1,8439.$$

Третье приближение,

$$x_3=1,8439-\frac{f(1,8439)}{f'(1,8439)}=1,8438,$$

дает уже нужную точность. Здесь сходимость процесса значительно более быстрая, чем в методе хорд, и в третьем приближении можно было получить точность до 10^{-6}.

3.12.6. Найти наименьший положительный корень уравнения $\operatorname{tg} x=x$ с точностью до 0,0001 по методу Ньютона.

3.12.7. Найти действительный корень уравнения $2-x-\lg x=0$, комбинируя метод хорд с методом касательных.

Решение. Перепишем левую часть уравнения следующим образом:

$$f(x)=(2-x)+(-\lg x).$$

Отсюда видно, что функция $f(x)$ есть сумма двух монотонно убывающих функций и поэтому она сама убывает. Значит, заданное уравнение имеет единственный корень ξ.

Непосредственная проверка показывает, что этот корень лежит в интервале $(1, 2)$. Этот интервал можно еще более сузить:

$$1,6<\xi<1,8,$$

так как

$$f(1,6)=0,1959>0; \qquad f(1,8)=-0,0553<0.$$

Далее

$$f'(x)=-1-\frac{1}{x}\lg e; \qquad f''(x)=\frac{1}{x^2}\lg e,$$

причем $f'(x)<0$; $f''(x)>0$ на всем отрезке $[1,6; 1,8]$.

Применяя к этому отрезку метод хорд, с одной стороны, и применяя метод касательных с начальной точкой $x_0=1,6$,— с другой стороны, получим первые приближения:

$$x_1=1,6-\frac{(1,8-1,6)f(1,6)}{f(1,8)-f(1,6)}=1,6+0,1559=1,7559;$$

$$x_1'=1,6-\frac{f(1,6)}{f'(1,6)}=1,6+0,1540=1,7540.$$

Применяя те же методы к отрезку [1,7540; 1,7559], получим вторые приближения:

$$x_2 = 1{,}7559 - \frac{(1{,}7540 - 1{,}7559)\, f(1{,}7559)}{f(1{,}7540) - f(1{,}7559)} = 1{,}75558,$$

$$x_2' = 1{,}7540 - \frac{f(1{,}75540)}{f'(1{,}7540)} = 1{,}75557.$$

Так как $x_2 - x_2' = 0{,}00001$, то корень ξ вычислен с точностью до 0,00001.

3.12.8. Найти комбинированным способом все корни уравнения

$$f(x) \equiv x^3 - 5x + 1 = 0 \text{ с точностью до } 0{,}001.$$

3.12.9. Найти методом итерации действительные корни уравнения $x - \sin x = 0{,}25$ с точностью до 0,001.

Решение. Представим данное уравнение в виде

$$x - 0{,}25 = \sin x.$$

Графическим способом устанавливаем, что уравнение имеет один действительный корень ξ, приближенно равный $x_0 = 1{,}2$ (рис. 58). Так как

$$\sin 1{,}1 = 0{,}8912 > 1{,}1 - 0{,}25,$$

$$\sin 1{,}3 = 0{,}9636 < 1{,}3 - 0{,}25,$$

то корень ξ лежит в интервале (1,1; 1,3).

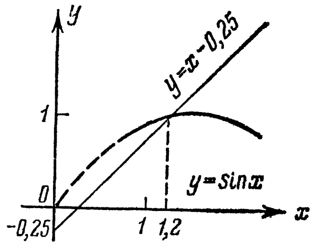

Рис. 58.

Запишем уравнение в виде

$$x = \varphi(x) = \sin x + 0{,}25.$$

Так как производная $\varphi'(x) = \cos x$ в интервале (1,1; 1,3) по абсолютной величине не превосходит $\cos 1{,}1 < 0{,}46 < 1$, то метод итерации применим. Строим последовательные приближения

$$x_n = \sin x_{n-1} + 0{,}25 \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

принимая за начальное приближение $x_0 = 1{,}2$:

$$x_1 = \sin 1{,}2 + 0{,}25 = 0{,}932 + 0{,}25 = 1{,}182;$$

$$x_2 = \sin 1{,}182 + 0{,}25 = 0{,}925 + 0{,}25 = 1{,}175;$$

$$x_3 = \sin 1{,}175 + 0{,}25 = 0{,}923 + 0{,}25 = 1{,}173;$$

$$x_4 = \sin 1{,}173 + 0{,}25 = 0{,}9219 + 0{,}25 = 1{,}1719;$$

$$x_5 = \sin 1{,}1719 + 0{,}25 = 0{,}9215 + 0{,}25 = 1{,}1715;$$

$$x_6 = \sin 1{,}1715 + 0{,}25 = 0{,}9211 + 0{,}25 = 1{,}1711.$$

Так как $q = 0{,}46$ и, значит, $q/(1-q) < 1$, то с требуемой точностью имеем $\xi = 1{,}171$.

3.12.10. Найти методом итерации наибольший положительный корень уравнения

$$x^3+x=1000$$

с точностью до 10^{-4}.

Решение. Грубой прикидкой получаем приближенное значение корня $x_0=10$.

Заданное уравнение можно переписать в виде

$$x=1000-x^3,$$

или в виде

$$x=1000/x^2-1/x,$$

или в виде

$$x=\sqrt[3]{1000-x},$$

и т. п. Наиболее выгодным среди указанных способов оказывается последний, так как, взяв за основной промежуток [9, 10] и положив

$$\varphi(x)=\sqrt[3]{1000-x},$$

найдем, что производная

$$\varphi'(x)=\frac{-1}{3\sqrt[3]{(1000-x)^2}}$$

по абсолютной величине не превосходит 1/300:

$$|\varphi'(x)|\leqslant\frac{1}{3\sqrt[3]{990^2}}\approx\frac{1}{300}=q.$$

Вычисляем последовательные приближения x_n с одним запасным знаком по формуле

$$x_{n+1}=\sqrt[3]{1000-x_n} \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

$$x_0=10,$$

$$x_1=\sqrt[3]{1000-10}=9{,}96655,$$

$$x_2=\sqrt[3]{1000-9{,}96655}=9{,}96666,$$

$$x_3=\sqrt[3]{1000-9{,}96666}=9{,}96667.$$

С точностью до 10^{-4} можно положить $\xi=9{,}9667$.

Замечание. Относительно быстрая сходимость процесса итерации вызвана здесь малостью величины q. Вообще, чем меньше q, тем быстрее сходится процесс итерации.

3.12.11. Найти по методу хорд положительный корень уравнения

$$f(x)\equiv x^3+1{,}1x^2+0{,}9x-1{,}4=0$$

с точностью до 0,0005.

3.12.12. Найти методом хорд приближенные значения действительных корней уравнения с точностью до 0,01:

а) $(x-1)^2-2\sin x=0$; б) $e^x-2(1-x)^2=0$.

3.12.13. Найти по способу Ньютона с точностью до 0,01 положительный корень уравнений:

а) $x^3+50x-60=0$; б) $x^3+x-32=0$.

3.12.14. Комбинированным методом найти значения корня уравнения

$$x^3-x-1=0$$

на отрезке [1, 2] с точностью до 0,005.

3.12.15. Найти методом итерации все корни уравнения

$$4x-5\ln x=5$$

с точностью до 10^{-4}.

§ 3.13. Дополнительные задачи

3.13.1. Удовлетворяет ли функция

$$f(x)=\begin{cases} x, & \text{если} \quad x<1, \\ 1/x, & \text{если} \quad x\geqslant 1 \end{cases}$$

условиям теоремы Лагранжа на отрезке [0, 2]?

3.13.2. Доказать, что для функции $y=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ число ξ в формуле Лагранжа, примененной на произвольном отрезке $[a, b]$, является средним арифметическим чисел a и b: $\xi=(a+b)/2$.

3.13.3. Доказать, что если уравнение

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x=0$$

имеет положительный корень x_0, то уравнение

$$na_0x^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}=0$$

имеет положительный корень, меньший, чем x_0.

3.13.4. Доказать, что уравнение $x^4-4x-1=0$ имеет два различных действительных корня.

3.13.5. Доказать, что функция $f(x)=x^n+px+q$ не может иметь более двух действительных корней при четном n и более трех при нечетном n.

3.13.6. Доказать, что все корни производной от заданного многочлена $f(x)=(x+1)(x-1)(x-2)(x-3)$ действительны.

3.13.7. Обнаружить ошибку в следующих рассуждениях. Функция

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin(1/x) & \text{при} \quad x\neq 0, \\ 0 & \text{при} \quad x=0 \end{cases}$$

дифференцируема при любом x. По теореме Лагранжа

$$x^2\sin\frac{1}{x}=x\left(2\xi\sin\frac{1}{\xi}-\cos\frac{1}{\xi}\right),$$

откуда

$$\cos\frac{1}{\xi}=2\xi\sin\frac{1}{\xi}-x\sin\frac{1}{x} \qquad (0<\xi<x).$$

При стремлении x к нулю будет стремиться к нулю и ξ. Переходя к пределу, получим $\lim\limits_{\xi\to 0}\cos(1/\xi)=0$, а между тем известно, что $\lim\limits_{x\to 0}\cos(1/x)$ не существует.

3.13.8. Обнаружить ошибку в следующем выводе формулы Коши. Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ на отрезке $[a, b]$ удовлетворяют всем условиям теоремы