3.12.13. Найти по способу Ньютона с точностью до 0,01 положительный корень уравнений:

а) $x^3+50x-60=0$; б) $x^3+x-32=0$.

3.12.14. Комбинированным методом найти значения корня уравнения

$$x^3-x-1=0$$

на отрезке [1, 2] с точностью до 0,005.

3.12.15. Найти методом итерации все корни уравнения

$$4x-5\ln x=5$$

с точностью до 10^{-4}.

§ 3.13. Дополнительные задачи

3.13.1. Удовлетворяет ли функция

$$f(x)=\begin{cases} x, & \text{если} \quad x<1, \\ 1/x, & \text{если} \quad x\geqslant 1 \end{cases}$$

условиям теоремы Лагранжа на отрезке [0, 2]?

3.13.2. Доказать, что для функции $y=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ число ξ в формуле Лагранжа, примененной на произвольном отрезке $[a, b]$, является средним арифметическим чисел a и b: $\xi=(a+b)/2$.

3.13.3. Доказать, что если уравнение

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x=0$$

имеет положительный корень x_0, то уравнение

$$na_0x^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}=0$$

имеет положительный корень, меньший, чем x_0.

3.13.4. Доказать, что уравнение $x^4-4x-1=0$ имеет два различных действительных корня.

3.13.5. Доказать, что функция $f(x)=x^n+px+q$ не может иметь более двух действительных корней при четном n и более трех при нечетном n.

3.13.6. Доказать, что все корни производной от заданного многочлена $f(x)=(x+1)(x-1)(x-2)(x-3)$ действительны.

3.13.7. Обнаружить ошибку в следующих рассуждениях. Функция

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin(1/x) & \text{при} \quad x\neq 0, \\ 0 & \text{при} \quad x=0 \end{cases}$$

дифференцируема при любом x. По теореме Лагранжа

$$x^2\sin\frac{1}{x}=x\left(2\xi\sin\frac{1}{\xi}-\cos\frac{1}{\xi}\right),$$

откуда

$$\cos\frac{1}{\xi}=2\xi\sin\frac{1}{\xi}-x\sin\frac{1}{x} \qquad (0<\xi<x).$$

При стремлении x к нулю будет стремиться к нулю и ξ. Переходя к пределу, получим $\lim\limits_{\xi\to 0}\cos(1/\xi)=0$, а между тем известно, что $\lim\limits_{x\to 0}\cos(1/x)$ не существует.

3.13.8. Обнаружить ошибку в следующем выводе формулы Коши. Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ на отрезке $[a, b]$ удовлетворяют всем условиям теоремы

Коши. Тогда каждая из них будет удовлетворять и условиям теоремы Лагранжа. Следовательно, для каждой функции можно записать формулу Лагранжа:

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a), \qquad a<\xi<b,$$
$$\varphi(b)-\varphi(a)=\varphi'(\xi)(b-a), \qquad a<\xi<b.$$

Разделив первое выражение на второе, получим

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{f'(\xi)(b-a)}{\varphi'(\xi)(b-a)}=\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}.$$

3.13.9. Доказать неравенства:

а) $\dfrac{a-b}{a}<\ln\dfrac{a}{b}<\dfrac{a-b}{b}$, если $0<b<a$,

б) $py^{p-1}(x-y)\leqslant x^p-y^p\leqslant px^{p-1}(x-y)$, если $0<y<x$ и $p>1$.

3.13.10. Доказать, что у многочлена Чебышева — Лагерра

$$L_n(x)=e^x\frac{d^n}{dx^n}(x^ne^{-x})$$

все корни положительные.

3.13.11. Доказать, что если функция $f(x)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) она определена и имеет непрерывную производную $(n-1)$-го порядка $f^{(n-1)}(x)$ на отрезке $[x_0, x_n]$;

2) она имеет производную n-го порядка $f^{(n)}(x)$ в интервале (x_0, x_n);

3) $f(x_0)=f(x_1)=\ldots=f(x_n)$ $(x_0<x_1<\ldots<x_n)$,

то внутри отрезка $[x_0, x_n]$ найдется по крайней мере одна точка ξ такая, что $f^{(n)}(\xi)=0$.

3.13.12. Предел отношения функций

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^{-2x}(\cos x+2\sin x)}{e^{-x}(\cos x+\sin x)}=\lim_{x\to\infty}e^{-x}\frac{1+2\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}x}$$

не существует, так как выражение $\dfrac{1+2\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}x}$ в точках $x_n=n\pi+\pi/2$ $(n=0, 1, \ldots)$ терпит разрывы, но в то же время предел отношения производных существует:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{[e^{-2x}(\cos x+2\sin x)]'}{[e^{-x}(\cos x+\sin x)]'}=\lim_{x\to\infty}\frac{-5e^{-2x}\sin x}{-2e^{-x}\sin x}=\frac{5}{2}\lim_{x\to\infty}e^{-x}=0.$$

Объяснить это кажущееся противоречие.

3.13.13. Доказать, что число θ в остаточном члене формулы Тейлора первого порядка

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a+\theta h)$$

стремится к $1/3$ при $h\longrightarrow 0$, если $f'''(x)$ непрерывна при $x=a$ и $f'''(a)\neq 0$.

3.13.14. Доказать, что число e — иррациональное число.

3.13.15. Доказать, что при $0<x\leqslant\pi/2$ функция $f(x)=(\sin x)/x$ убывает. Отсюда получить неравенство $2x/\pi<\sin x<x$ при $0<x<\pi/2$ и дать его геометрическую интерпретацию.

3.13.16. Показать, что функция $f(x)=x+\cos x-a$ возрастает. Вывести отсюда, что уравнение $x+\cos x=a$ не имеет положительных корней при $a<1$ и имеет один положительный корень при $a>1$.

3.13.17. Показать, что уравнение $xe^x=2$ имеет только один положительный корень, заключенный в интервале $(0, 1)$.

3.13.18. Доказать, что функция

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x+x^2\sin\frac{1}{x} & \text{при} \quad x\neq 0,\\ 0 & \text{при} \quad x=0\end{cases}$$

не является монотонной ни в каком промежутке, содержащем начало координат. Наметить эскиз графика $f(x)$.

3.13.19. Доказать теорему, если: 1) $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны в промежутке $[a, b]$ и дифференцируемы внутри него; 2) $f(a)=\varphi(a)$ и 3) $f'(x)>\varphi'(x)$ $(a<x<b)$, то $f(x)>\varphi(x)$ $(a<x<b)$.

3.13.20. Показать, что функция $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ не имеет ни максимумов, ни минимумов, каковы бы ни были значения a, b, c, d.

3.13.21. В трехчлене x^2+px+q подобрать коэффициенты p и q так, чтобы трехчлен имел минимум при $x=3$ и чтобы этот минимум был равен 5.

3.13.22. Исследовать на экстремум в точке $x=x_0$ функцию $f(x)=(x-x_0)^n\varphi(x)$, где n — натуральное число, функция $\varphi(x)$ непрерывна при $x=x_0$ и $\varphi(x_0)\neq 0$.

3.13.23. Дана непрерывная функция

$$f(x)=\begin{cases}\left(2-\sin\frac{1}{x}\right)|x| & \text{при} \quad x\neq 0,\\ 0 & \text{при} \quad x=0.\end{cases}$$

Показать, что $f(x)$ в точке $x=0$ имеет минимум, но ни слева, ни справа от $x=0$ не является монотонной.

3.13.24. Найти наибольшие и наименьшие значения на указанных промежутках следующих функций:

а) $y=|x|$ при $-1\leqslant x\leqslant 1$,

б) $y=E(x)$ при $-2\leqslant x\leqslant 1$.

3.13.25. Существуют ли наибольшие и наименьшие значения на указанных промежутках у следующих функций:

а) $f(x)=\cos x$ при $-\pi/2\leqslant x<\pi$,

б) $f(x)=\arcsin x$ при $-1<x<1$?

3.13.26. Доказать, что между двумя максимумами (минимумами) непрерывной функции имеется минимум (максимум) этой функции.

3.13.27. Доказать, что функция

$$f(x)=\begin{cases}x^2\sin^2(1/x) & \text{для} \quad x\neq 0,\\ 0 & \text{для} \quad x=0\end{cases}$$

имеет в точке $x_0=0$ минимум, причем этот минимум нестрогий.

3.13.28. Доказать, что если в точке минимума существует правая производная, то она неотрицательна, а если существует левая производная, то она неположительна.

3.13.29. Показать, что функция

$$y=\begin{cases}1/x^2 & (x>0),\\ 3x^2 & (x\leqslant 0)\end{cases}$$

имеет минимум в точке $x=0$, хотя ее первая производная не меняет знака при переходе через эту точку.

3.13.30. Пусть x_0 — абсцисса точки перегиба кривой $y=f(x)$. Будет ли точка x_0 точкой экстремума для функции $y=f'(x)$?

3.13.31. Нарисовать примерный график функции $y=f(x)$ в окрестности точки $x=-1$, если:

$$f(-1)=2, \quad f'(-1)=-1, \quad f''(-1)=0, \quad f'''(x)>0.$$

3.13.32. При каком выборе параметра h «кривая вероятностей»

$$y=\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2x^2} \qquad (h>0)$$

имеет точки перегиба $x=\pm\sigma$?

3.13.33. Показать, что у любой дважды непрерывно дифференцируемой функции между двумя точками экстремума лежит по крайней мере одна абсцисса точки перегиба графика функции.

3.13.34. На примере функции

$$y=x^4+8x^3+18x^2+8$$

проверить, что между абсциссами точек перегиба графика функции может и не быть точек экстремума.

3.13.35. Доказать, что всякий многочлен с положительными коэффициентами, являющийся четной функцией, всюду вогнут и имеет только одну точку минимума.

3.13.36. Доказать, что всякий многочлен нечетной степени $n\geqslant 3$ имеет по крайней мере одну точку перегиба.

3.13.37. Исходя непосредственно из определения, проверить, что прямая $y=2x+1$ есть асимптота кривой

$$y=\frac{2x^4+x^3+1}{x^3}.$$