Глава IV

Неопределенный интеграл. Основные методы интегрирования

§ 4.1. Непосредственное интегрирование и метод разложения

Непосредственное интегрирование заключается в прямом использовании *таблицы интегралов*:

1) $\int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$; 2) $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$;

3) $\int a^u\,du = \frac{1}{\ln a}a^u + C$; $\int e^u\,du = e^u + C$;

4) $\int \cos u\,du = \sin u + C$; $\int \sin u\,du = -\cos u + C$;

5) $\int \operatorname{ch} u\,du = \operatorname{sh} u + C$; $\int \operatorname{sh} u\,du = \operatorname{ch} u + C$;

6) $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C$; $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C$;

7) $\int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u}{a} + C = -\frac{1}{a}\operatorname{arcctg}\frac{u}{a} + C_1 \quad (a>0)$;

8) $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C = -\arccos\frac{u}{a} + C_1 \quad (a>0)$;

9) $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left(u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right) + C$;

10) $\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C$.

Во всех этих формулах переменная u является или независимой переменной или дифференцируемой функцией некоторой переменной. Если

$$\int f(u)\,du = F(u) + C,$$

то

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C.$$

Метод разложения заключается в разложении подынтегральной функции в линейную комбинацию более простых функций и применении свойства линейности интеграла:

$$\int \sum_{i=1}^{n} a_i f_i(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} a_i \int f_i(x)\,dx \quad \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i| > 0\right).$$

4.1.1. Найти интеграл $I=\int \frac{x^2+5x-1}{\sqrt{x}}\,dx.$

Решение.

$$I=\int \frac{x^2+5x-1}{\sqrt{x}}\,dx=\int (x^{3/2}+5x^{1/2}-x^{-1/2})\,dx=$$

$$=\int x^{3/2}\,dx+5\int x^{1/2}\,dx-\int x^{-1/2}\,dx=$$

$$=\frac{2x^{5/2}}{5}+C_1+\frac{5\cdot 2}{3}x^{3/2}+C_2-2x^{1/2}+C_3=2\sqrt{x}\left(\frac{x^2}{5}+\frac{5x}{3}-1\right)+C.$$

Замечание. Ставить произвольную постоянную после вычисления каждого интеграла (как сделано в разобранном примере) не следует: обычно все произвольные постоянные суммируются и результат, обозначенный одной буквой C, записывается сразу в окончательный ответ.

4.1.2. $I=\int \frac{6x^3+x^2-2x+1}{2x-1}\,dx.$

4.1.3. $I=\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}.$

Решение. Преобразуем подынтегральную функцию так:

$$\frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Следовательно,

$$I=\int \frac{dx}{\cos^2 x}+\int \frac{dx}{\sin^2 x}=\operatorname{tg} x-\operatorname{ctg} x+C.$$

4.1.4. $I=\int \operatorname{tg}^2 x\,dx.$

Решение. Так как $\operatorname{tg}^2 x=\sec^2 x-1$, то

$$I=\int \operatorname{tg}^2 x\,dx=\int \frac{dx}{\cos^2 x}-\int dx=\operatorname{tg} x-x+C.$$

4.1.5. $I=\int (x^2+5)^3\,dx.$

Решение. Разлагая по формуле бинома, находим

$$I=\int (x^6+15x^4+75x^2+125)\,dx=\frac{x^7}{7}+\frac{15x^5}{5}+\frac{75x^3}{3}+125x+C.$$

4.1.6. $I=\int (3x+5)^{17}\,dx.$

Решение. Здесь возводить двучлен в 17-ю степень нецелесообразно, так как $u=3x+5$ — линейная функция.

Исходя из табличного интеграла

$$\int u^{17}\,du=\frac{u^{18}}{18}+C,$$

получаем

$$I=\frac{1}{3}\cdot\frac{(3x+5)^{18}}{18}+C.$$

4.1.7. $I=\int\frac{dx}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}$.

4.1.8. $I=\int\cos(\pi x+1)\,dx$.

Решение. Исходя из табличного интеграла

$$\int\cos u\,du=\sin u+C,$$

получаем

$$I=\frac{1}{\pi}\sin(\pi x+1)+C.$$

4.1.9. $I=\int\cos 4x\cos 7x\,dx$.

Решение. При вычислении подобных интегралов целесообразно пользоваться тригонометрическими формулами разложения произведения в сумму. Здесь

$$\cos 4x\cos 7x=\frac{1}{2}(\cos 3x+\cos 11x)$$

и поэтому

$$I=\frac{1}{2}\int\cos 3x\,dx+\frac{1}{2}\int\cos 11x\,dx=\frac{1}{6}\sin 3x+\frac{1}{22}\sin 11x+C.$$

Замечание. При решении подобных задач полезно иметь следующие формулы разложения:

$$\sin mx\cos nx=\frac{1}{2}\left[\sin(m-n)x+\sin(m+n)x\right];$$

$$\sin mx\sin nx=\frac{1}{2}\left[\cos(m-n)x-\cos(m+n)x\right];$$

$$\cos mx\cos nx=\frac{1}{2}\left[\cos(m-n)x+\cos(m+n)x\right].$$

4.1.10. $I=\int\cos x\cos 2x\cos 5x\,dx$.

Решение. Имеем

$$(\cos x\cos 2x)\cos 5x=\frac{1}{2}(\cos x+\cos 3x)\cos 5x=$$

$$=\frac{1}{4}\left[\cos 4x+\cos 6x\right]+\frac{1}{4}(\cos 2x+\cos 8x).$$

Таким образом,

$$I=\frac{1}{4}\left[\int\cos 2x\,dx+\int\cos 4x\,dx+\int\cos 6x\,dx+\int\cos 8x\,dx\right]=$$

$$=\frac{1}{8}\sin 2x+\frac{1}{16}\sin 4x+\frac{1}{24}\sin 6x+\frac{1}{32}\sin 8x+C.$$

4.1.11. $I=\int\sin^2 3x\,dx$.

Решение. Так как $\sin^2 3x = (1 - \cos 6x)/2$, то

$$I = \frac{1}{2}\int (1 - \cos 6x)\, dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{12} \sin 6x + C.$$

4.1.12. $I = \int \operatorname{ch}^2 (8x + 5)\, dx.$

Решение. Так как $\operatorname{ch}^2 u = (\operatorname{ch} 2u + 1)/2$, то

$$I = \frac{1}{2}\int \left[1 + \operatorname{ch} (16x + 10) \right] dx = \frac{1}{2} x + \frac{1}{32} \operatorname{sh} (16x + 10) + C.$$

4.1.13. $I = \int \frac{dx}{x^2 + 4x + 5}.$

Решение. $I = \int \frac{dx}{x^2 + 4x + 5} = \int \frac{dx}{(x + 2)^2 + 1} = \operatorname{arctg} (x + 2) + C.$

4.1.14. $I = \int \frac{dx}{4x^2 + 25}.$

4.1.15. $I = \int \frac{dx}{x^2 + x + 1}.$

4.1.16. $I = \int \frac{dx}{\sqrt{4 - 9x^2}}.$

Решение. $I = \int \frac{dx}{\sqrt{4 - 9x^2}} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\sqrt{4/9 - x^2}} = \frac{1}{3} \arcsin \frac{3x}{2} + C.$

4.1.17. $I = \int \frac{dx}{\sqrt{5 - x^2 - 4x}}.$

Решение. $I = \int \frac{dx}{\sqrt{5 - x^2 - 4x}} = \int \frac{dx}{\sqrt{9 - (x + 2)^2}} = \arcsin \frac{x + 2}{3} + C.$

4.1.18. $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 6x + 1}}.$

4.1.19. $I = \int \frac{dx}{4 - x^2 - 4x}.$

Решение.

$$I = \int \frac{dx}{4 - x^2 - 4x} = \int \frac{dx}{8 - (x + 2)^2} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \left| \frac{2\sqrt{2} + x + 2}{2\sqrt{2} - (x + 2)} \right| + C.$$

4.1.20. $I = \int \frac{dx}{10x^2 - 7}.$

4.1.21. Найти интегралы:

а) $\int \frac{dx}{x^2 - 6x + 13}$; б) $\int \frac{x - 1}{\sqrt[3]{x^2}}\, dx$;

в) $\int \frac{3 - 2 \operatorname{ctg}^2 x}{\cos^2 x}\, dx$; г) $\int \frac{2 + 3x^2}{x^2 (1 + x^2)}\, dx.$

4.1.22. Найти интегралы:

а) $\int \frac{\sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 + x^2}}{\sqrt{1 - x^4}}\, dx$; б) $\int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x}\, dx$;

в) $\int \frac{2^{x+1} - 5^{x-1}}{10^x}\, dx$; г) $\int (\sin 5x - \sin 5\alpha)\, dx.$