§ 4.2. Метод подстановки

Метод подстановки (или *замены переменной интегрирования*) заключается в том, что заменяют x на $\varphi(t)$, где $\varphi(t)$ — непрерывно дифференцируемая функция, и получают

$$\int f(x)\,dx = \int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt,$$

причем после интегрирования возвращаются к старой переменной обратной подстановкой $t=\varphi^{-1}(x)$.

Указанную формулу применяют также и в обратном направлении:

$$\int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt = \int f(x)\,dx, \text{ где } x=\varphi(t).$$

4.2.1. $I=\int x\sqrt{x-5}\,dx.$

Решение. Применим подстановку

$$\sqrt{x-5}=t.$$

Отсюда

$$x-5=t^2, \quad x=t^2+5, \quad dx=2t\,dt.$$

Подставив в интеграл, получим

$$I=\int (t^2+5)\,t\cdot 2t\,dt = 2\int (t^4+5t^2)\,dt =$$
$$= 2\,\frac{t^5}{5}+\frac{10t^3}{3}+C.$$

Возвратимся к прежней переменной x:

$$I=\frac{2(x-5)^{5/2}}{5}+\frac{10(x-5)^{3/2}}{3}+C.$$

4.2.2. $I=\int \frac{dx}{1+e^x}.$

Решение. Применим подстановку $1+e^x=t$. Отсюда

$$e^x=t-1, \quad x=\ln(t-1), \quad dx=dt/(t-1).$$

Подставив в интеграл, получим

$$I=\int \frac{dx}{1+e^x}=\int \frac{dt}{t(t-1)}.$$

Но

$$\frac{1}{t(t-1)}=\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t},$$

поэтому

$$I=\int \frac{dt}{t-1}-\int \frac{dt}{t}=\ln|t-1|-\ln|t|+C.$$

Возвращаясь к переменной x, получим

$$I=\ln\frac{e^x}{1+e^x}+C=x-\ln(1+e^x)+C.$$

Замечание. Можно вычислить этот интеграл проще, умножив числитель и знаменатель на e^{-x}. Получим

$$\int\frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}dx=-\int\frac{-e^{-x}}{e^{-x}+1}dx=-\ln(e^{-x}+1)+C=$$
$$=-\ln\frac{e^x+1}{e^x}=x-\ln(e^x+1)+C.$$

4.2.3. $I=\int\frac{x^2+3}{\sqrt{(2x-5)^3}}dx.$

4.2.4. $I=\int\frac{(x^2-1)\,dx}{(x^4+3x^2+1)\operatorname{arctg}\frac{x^2+1}{x}}.$

Решение. Преобразуем подынтегральное выражение

$$I=\int\frac{(1-1/x^2)\,dx}{[(x+1/x)^2+1]\operatorname{arctg}(x+1/x)}$$

Применим подстановку $x+1/x=t$; продифференцировав, получим

$$(1-1/x^2)\,dx=dt.$$

Отсюда

$$I=\int\frac{dt}{(t^2+1)\operatorname{arctg}t}.$$

Применим еще одну подстановку $\operatorname{arctg}t=u$. Тогда

$$\frac{dt}{t^2+1}=du$$

и

$$I=\int\frac{du}{u}=\ln|u|+C.$$

Возвращаясь сначала к переменной t, а затем к переменной x, будем иметь

$$I=\ln|\operatorname{arctg}t|+C=\ln|\operatorname{arctg}(x+1/x)|+C.$$

4.2.5. $I=\int\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^4}dx.$

Решение. Применим подстановку:

$$x=\frac{1}{t};\quad dx=-\frac{dt}{t^2}.$$

Следовательно,

$$I=-\int\frac{\sqrt{a^2-1/t^2}}{(1/t^4)\,t^2}dt=-\int t\sqrt{a^2t^2-1}\,dt.$$

Применим еще одну подстановку: $\sqrt{a^2t^2-1}=z$. Тогда $2a^2t\,dt = 2z\,dz$ и

$$I=-\frac{1}{a^2}\int z^2dz=-\frac{1}{3a^2}z^3+C.$$

Возвращаясь к переменной t, а затем и к переменной x, получим

$$I=-\frac{(a^2-x^2)^{3/2}}{3a^2x^3}+C.$$

4.2.6. $I=\int\frac{dx}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}$.

Решение.

$$I=\int\frac{dx}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}=\frac{1}{b^2}\int\frac{1}{\frac{a^2}{b^2}\operatorname{tg}^2 x+1}\cdot\frac{dx}{\cos^2 x}.$$

Применим подстановку $\frac{a}{b}\operatorname{tg} x=t$; $dt=\frac{a}{b}\frac{dx}{\cos^2 x}$. Тогда

$$I=\frac{1}{ab}\int\frac{dt}{1+t^2}=\frac{1}{ab}\operatorname{arctg} t+C.$$

Возвращаясь к переменной x, получим

$$I=\frac{1}{ab}\operatorname{arctg}\left(\frac{a}{b}\operatorname{tg} x\right)+C.$$

4.2.7. $I=\int\sqrt[3]{1+3\sin x}\cos x\,dx$.

Решение. Применим подстановку $1+3\sin x=t$, $3\cos x\,dx=dt$. Тогда

$$I=\frac{1}{3}\int\sqrt[3]{t}\,dt=\frac{1}{3}\int t^{1/3}dt=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}t^{4/3}+C=$$

$$=\frac{(1+3\sin x)^{4/3}}{4}+C.$$

4.2.8. $I=\int\frac{\sin x\,dx}{\sqrt{\cos x}}$.

4.2.9. $I=\int\frac{dx}{(\arccos x)^5\sqrt{1-x^2}}$.

Решение. Применим подстановку: $\arccos x=t$; $-dx/\sqrt{1-x^2}=dt$. Тогда

$$I=-\int\frac{dt}{t^5}=-\int t^{-5}\,dt=\frac{1}{4}t^{-4}+C=\frac{1}{4\arccos^4 x}+C.$$

4.2.10. $I=\int\frac{x^2+1}{\sqrt[3]{x^3+3x+1}}dx$.

4.2.11. $I=\int \frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x}\,dx.$

Решение. Применим подстановку:

$$1+\sin^2 x=t;\ 2\sin x\cos x\,dx=\sin 2x\,dx=dt.$$

Тогда

$$I=\int \frac{dt}{t}=\ln t+C=\ln(1+\sin^2 x)+C.$$

4.2.12. $I=\int \frac{1+\ln x}{3+x\ln x}\,dx.$

Решение. Применим подстановку

$$3+x\ln x=t,\qquad (1+\ln x)\,dx=dt$$

и получим

$$I=\int \frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln|3+x\ln x|+C.$$

4.2.13. Найти интегралы:

а) $\int \frac{\sqrt[3]{1+\ln x}}{x}\,dx$; б) $\int \frac{dx}{x\ln x}$;

в) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{3-x^4}}$; г) $\int \frac{x^{n-1}}{x^{2n}+a^2}\,dx$;

д) $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$; е) $\int \left(\ln x+\frac{1}{\ln x}\right)\frac{dx}{x}$.

4.2.14. Найти интегралы:

а) $\int x^2\sqrt[3]{1-x}\,dx$; б) $\int \frac{\ln x\,dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$;

в) $\int \cos^5 x\sqrt{\sin x}\,dx$; г) $\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

§ 4.3. Интегрирование по частям

Формулой интегрирования по частям называется формула

$$\int u\,dv=uv-\int v\,du,$$

где u и v — дифференцируемые функции от x.

Для применения этой формулы подынтегральное выражение следует представить в виде произведения одной функции на дифференциал другой функции. Если под интегралом стоит произведение логарифмической или обратной тригонометрической функции на алгебраическую, то за u обычно принимают не алгебраическую функцию. Если же под интегралом стоит произведение тригонометрической или показательной функции на алгебраическую, то за u обычно принимают алгебраическую функцию.

4.3.1. $I=\int \operatorname{arctg} x\,dx.$