**4.2.11.** $I=\int \frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x}\,dx.$

Решение. Применим подстановку:

$$1+\sin^2 x=t;\ 2\sin x\cos x\,dx=\sin 2x\,dx=dt.$$

Тогда

$$I=\int \frac{dt}{t}=\ln t+C=\ln(1+\sin^2 x)+C.$$

**4.2.12.** $I=\int \frac{1+\ln x}{3+x\ln x}\,dx.$

Решение. Применим подстановку

$$3+x\ln x=t,\qquad (1+\ln x)\,dx=dt$$

и получим

$$I=\int \frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln|3+x\ln x|+C.$$

**4.2.13.** Найти интегралы:

а) $\int \frac{\sqrt[3]{1+\ln x}}{x}\,dx$; б) $\int \frac{dx}{x\ln x}$;

в) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{3-x^4}}$; г) $\int \frac{x^{n-1}}{x^{2n}+a^2}\,dx$;

д) $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$; е) $\int \left(\ln x+\frac{1}{\ln x}\right)\frac{dx}{x}$.

**4.2.14.** Найти интегралы:

а) $\int x^2\sqrt[3]{1-x}\,dx$; б) $\int \frac{\ln x\,dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$;

в) $\int \cos^5 x\sqrt{\sin x}\,dx$; г) $\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

## § 4.3. Интегрирование по частям

Формулой интегрирования по частям называется формула

$$\int u\,dv=uv-\int v\,du,$$

где $u$ и $v$ — дифференцируемые функции от $x$.

Для применения этой формулы подынтегральное выражение следует представить в виде произведения одной функции на дифференциал другой функции. Если под интегралом стоит произведение логарифмической или обратной тригонометрической функции на алгебраическую, то за $u$ обычно принимают не алгебраическую функцию. Если же под интегралом стоит произведение тригонометрической или показательной функции на алгебраическую, то за $u$ обычно принимают алгебраическую функцию.

**4.3.1.** $I=\int \operatorname{arctg} x\,dx.$

Решение. Положим здесь

$$u = \operatorname{arctg} x, \qquad dv = dx,$$

откуда

$$du = \frac{dx}{1+x^2}; \qquad v = x;$$

$$I = \int \operatorname{arctg} x\, dx = x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x\, dx}{1+x^2} =$$

$$= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C.$$

**4.3.2.** $I = \int \arcsin x\, dx.$

**4.3.3.** $I = \int x \cos x\, dx.$

Решение. Положим

$$u = x; \qquad dv = \cos x\, dx,$$

откуда

$$du = dx; \qquad v = \sin x;$$

$$I = \int x \cos x\, dx = x \sin x - \int \sin x\, dx = x \sin x + \cos x + C.$$

Посмотрим на этом примере, к каким результатам приводит неудачный выбор множителей $u$ и $dv$.

В интеграле $\int x \cos x\, dx$ положим

$$u = \cos x; \qquad dv = x\, dx,$$

откуда

$$du = -\sin x\, dx; \qquad v = \frac{1}{2} x^2.$$

В этом случае

$$I = \frac{1}{2} x^2 \cos x + \frac{1}{2} \int x^2 \sin x\, dx.$$

Интеграл не упростился, а усложнился.

**4.3.4.** $I = \int x^3 \ln x\, dx.$

Решение. Положим

$$u = \ln x; \qquad dv = x^3\, dx,$$

откуда

$$du = \frac{dx}{x}; \qquad v = \frac{1}{4} x^4,$$

$$I = \frac{1}{4} x^4 \ln x - \frac{1}{4} \int x^4 \frac{dx}{x} = \frac{1}{4} x^4 \ln x - \frac{1}{4} \int x^3\, dx =$$

$$= \frac{1}{4} x^4 \ln x - \frac{1}{16} x^4 + C.$$

**4.3.5.** $I = \int (x^2 - 2x + 5)\, e^{-x}\, dx.$

Решение. Положим

$$u=x^2-2x+5; \qquad dv=e^{-x}\,dx,$$

откуда

$$du=(2x-2)\,dx; \qquad v=-e^{-x};$$

$$I=\int (x^2-2x+5)\,e^{-x}\,dx=-e^{-x}(x^2-2x+5)+2\int (x-1)\,e^{-x}\,dx.$$

Последний интеграл опять проинтегрируем по частям. Положим

$$x-1=u; \qquad dv=e^{-x}\,dx,$$

откуда

$$du=dx; \qquad v=-e^{-x}.$$

$$I_1=2\int (x-1)\,e^{-x}\,dx=-2e^{-x}(x-1)+2\int e^{-x}\,dx=-2xe^{-x}+C.$$

Окончательно получим

$$I=-e^{-x}(x^2-2x+5)-2xe^{-x}+C=-e^{-x}(x^2+5)+C.$$

Замечание. В результате вычисления интегралов вида $\int P(x)\,e^{ax}\,dx$ мы получаем функцию вида $Q(x)\,e^{ax}$, где $Q(x)$—многочлен той же степени, что и многочлен $P(x)$.

Это обстоятельство позволяет применить для вычисления интегралов указанного типа метод неопределенных коэффициентов, сущность которого поясним на следующем примере.

**4.3.6.** Найти методом неопределенных коэффициентов

$$I=\int (3x^3-17)\,e^{2x}\,dx.$$

Решение. $\int (3x^3-17)\,e^{2x}\,dx=(Ax^3+Bx^2+Dx+E)\,e^{2x}+C.$

Продифференцировав правую и левую части, получим

$$(3x^3-17)\,e^{2x}=2(Ax^3+Bx^2+Dx+E)\,e^{2x}+e^{2x}(3Ax^2+2Bx+D).$$

Сократив на $e^{2x}$, получим

$$3x^3-17\equiv 2Ax^3+(2B+3A)\,x^2+(2D+2B)\,x+(2E+D).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $x$ в левой и правой частях этого тождества, будем иметь

$$3=2A; \qquad 0=2B+3A;$$
$$0=2D+2B; \qquad -17=2E+D.$$

Решив систему, получим

$$A=\frac{3}{2}; \qquad B=-\frac{9}{4}; \qquad D=\frac{9}{4}; \qquad E=-\frac{77}{8}.$$

Следовательно,

$$\int (3x^3-17)\,e^{2x}\,dx=\left(\frac{3}{2}x^3-\frac{9}{4}x^2+\frac{9}{4}x-\frac{77}{8}\right)e^{2x}+C.$$

**4.3.7.** Найти интеграл:

$$I = \int (x^3 + 1) \cos x \, dx.$$

Решение. Положим

$$u = x^3 + 1; \qquad dv = \cos x \, dx,$$

откуда

$$du = 3x^2 \, dx; \qquad v = \sin x.$$

$$I = (x^3 + 1) \sin x - 3 \int x^2 \sin x \, dx = (x^3 + 1) \sin x - 3I_1,$$

где $I_1 = \int x^2 \sin x \, dx$.

Интегрируя снова по частям, получим

$$I_1 = -x^2 \cos x + 2I_2,$$

где $I_2 = \int x \cos x \, dx$.

Опять интегрируя по частям, получим

$$I_2 = x \sin x + \cos x + C.$$

Окончательно будем иметь:

$$I = \int (x^3 + 1) \cos x \, dx =$$
$$= (x^3 + 1) \sin x + 3x^2 \cos x - 6x \sin x - 6 \cos x + C =$$
$$= (x^3 - 6x + 1) \sin x + (3x^2 - 6) \cos x + C.$$

Замечание. К интегралам вида

$$\int P(x) \sin ax \, dx, \quad \int P(x) \cos ax \, dx$$

можно также применять метод неопределенных коэффициентов.

**4.3.8.** $I = \int (x^2 + 3x + 5) \cos 2x \, dx.$

Решение. Положим

$$\int (x^2 + 3x + 5) \cos 2x \, dx =$$
$$= (A_0x^2 + A_1x + A_2) \cos 2x + (B_0x^2 + B_1x + B_2) \sin 2x + C.$$

Дифференцируем обе части тождества:

$$(x^2 + 3x + 5) \cos 2x = -2(A_0x^2 + A_1x + A_2) \sin 2x +$$
$$+ (2A_0x + A_1) \cos 2x + 2(B_0x^2 + B_1x + B_2) \cos 2x +$$
$$+ (2B_0x + B_1) \sin 2x = [2B_0x^2 + (2B_1 + 2A_0)x + (A_1 + 2B_2)] \cos 2x +$$
$$+ [-2A_0x^2 + (2B_0 - 2A_1)x + (B_1 - 2A_2)] \sin 2x.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $x$ у множителей $\cos 2x$ и $\sin 2x$, получим систему уравнений

$$2B_0 = 1; \qquad 2(B_1 + A_0) = 3; \qquad A_1 + 2B_2 = 5;$$
$$-2A_0 = 0; \qquad 2(B_0 - A_1) = 0; \qquad B_1 - 2A_2 = 0.$$

Решая систему, находим

$$A_0=0;\quad B_0=\frac{1}{2};\quad A_1=\frac{1}{2};\quad B_1=\frac{3}{2};\quad A_2=\frac{3}{4};\quad B_2=\frac{9}{4}.$$

Таким образом,

$$\int (x^2+3x+5)\cos 2x\,dx=$$
$$=\left(\frac{x}{2}+\frac{3}{4}\right)\cos 2x+\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x+\frac{9}{4}\right)\sin 2x+C.$$

**4.3.9.** $I=\int (3x^2+6x+5)\operatorname{arctg} x\,dx.$

Решение. Положим

$$u=\operatorname{arctg} x;\quad dv=(3x^2+6x+5)\,dx,$$

откуда

$$du=\frac{dx}{1+x^2};\quad v=x^3+3x^2+5x.$$

Следовательно,

$$I=(x^3+3x^2+5x)\operatorname{arctg} x-\int\frac{x^3+3x^2+5x}{1+x^2}\,dx.$$

Из подынтегральной функции последнего интеграла выделим целую часть, разделив числитель на знаменатель:

$$I_1=\int\frac{x^3+3x^2+5x}{1+x^2}\,dx=\int (x+3)\,dx+\int\frac{4x-3}{x^2+1}\,dx=$$
$$=\frac{x^2}{2}+3x+2\int\frac{2x\,dx}{x^2+1}-3\int\frac{dx}{x^2+1}=$$
$$=\frac{x^2}{2}+3x+2\ln(x^2+1)-3\operatorname{arctg} x+C.$$

Подставив значение $I_1$, окончательно получим

$$I=(x^3+3x^2+5x+3)\operatorname{arctg} x-x^2/2-3x-2\ln(x^2+1)+C.$$

**4.3.10.** Найти интеграл

$$I=\int e^{5x}\cos 4x\,dx.$$

Решение. Положим

$$e^{5x}=u;\quad \cos 4x\,dx=dv,$$

откуда

$$5e^{5x}\,dx=du;\qquad v=\frac{1}{4}\sin 4x.$$

Следовательно,

$$I=\frac{1}{4}e^{5x}\sin 4x-\frac{5}{4}\int e^{5x}\sin 4x\,dx.$$

Снова интегрируя по частям, получим

$$I_1=\int e^{5x}\sin 4x\,dx=-\frac{1}{4}e^{5x}\cos 4x+\frac{5}{4}\int e^{5x}\cos 4x\,dx.$$

Таким образом,

$$I=\frac{1}{4}e^{5x}\sin 4x-\frac{5}{4}\left(-\frac{1}{4}e^{5x}\cos 4x+\frac{5}{4}\int e^{5x}\cos 4x\,dx\right),$$

т. е.

$$I=\frac{1}{4}e^{5x}\left(\sin 4x+\frac{5}{4}\cos 4x\right)-\frac{25}{16}I.$$

Отсюда

$$I=\frac{4}{41}e^{5x}\left(\sin 4x+\frac{5}{4}\cos 4x\right)+C.$$

**4.3.11.** $I=\int\cos(\ln x)\,dx.$

Решение. Положим

$$u=\cos(\ln x);\quad dv=dx,$$

откуда

$$du=-\sin(\ln x)\frac{dx}{x};\qquad v=x.$$

Следовательно,

$$I=\int\cos(\ln x)\,dx=x\cos(\ln x)+\int\sin(\ln x)\,dx.$$

Интегрируем еще раз по частям:

$$u=\sin(\ln x);\quad dv=dx,$$

откуда

$$du=\cos(\ln x)\frac{dx}{x};\quad v=x.$$

Следовательно,

$$I_1=\int\sin(\ln x)\,dx=x\sin(\ln x)-\int\cos(\ln x)\,dx.$$

Таким образом,

$$I=\int\cos(\ln x)\,dx=x\cos(\ln x)+x\sin(\ln x)-I.$$

Отсюда

$$I=\frac{x}{2}[\cos(\ln x)+\sin(\ln x)]+C.$$

**4.3.12.** $I=\int x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)dx.$

Решение. Преобразуем подынтегральную функцию

$$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\ln\frac{x+1}{x}=\ln(x+1)-\ln x.$$

Отсюда

$$I=\int x\ln(x+1)\,dx-\int x\ln x\,dx=I_1-I_2.$$

Проинтегрируем $I_1$ и $I_2$ по частям. Положим

$$u=\ln(x+1);\quad dv=x\,dx,$$

откуда

$$du=\frac{dx}{1+x};\quad v=\frac{1}{2}(x^2-1).$$

Следовательно,

$$I_1=\int x\ln(x+1)\,dx=\frac{1}{2}(x^2-1)\ln(x+1)-\frac{1}{2}\int\frac{(x^2-1)\,dx}{1+x}=$$

$$=\frac{x^2-1}{2}\ln(x+1)-\frac{1}{2}\int(x-1)\,dx=$$

$$=\frac{x^2-1}{2}\ln(x+1)-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+C.$$

Аналогично,

$$I_2=\int x\ln x\,dx=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{1}{4}x^2+C.$$

Окончательно будем иметь

$$I=\int x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)dx=\frac{1}{2}(x^2-1)\ln(x+1)-\frac{x^2}{2}\ln x+\frac{x}{2}+C.$$

**4.3.13.** $I=\int\frac{\sqrt{x^2+1}\,[\ln(x^2+1)-2\ln x]}{x^4}\,dx.$

Решение. Сделаем сначала подстановку:

$$1+1/x^2=t.$$

Тогда

$$dt=-\frac{2dx}{x^3}\text{ или }\frac{dx}{x^3}=-\frac{1}{2}dt.$$

Следовательно,

$$I=\int\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\ln\frac{x^2+1}{x^2}\cdot\frac{dx}{x^3}=-\frac{1}{2}\int\sqrt{t}\ln t\,dt.$$

Полученный интеграл легко берется по частям. Положим

$$u=\ln t;\quad dv=\sqrt{t}\,dt.$$

Тогда

$$du=\frac{dt}{t};\quad v=\frac{2}{3}t\sqrt{t}.$$

Отсюда

$$-\frac{1}{2}\int\sqrt{t}\ln t\,dt=-\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}t\sqrt{t}\ln t-\frac{2}{3}\int\sqrt{t}\,dt\right]=$$

$$=-\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}t\sqrt{t}\ln t-\frac{4}{9}t\sqrt{t}\right]+C.$$

Возвращаясь к переменной $x$, получим

$$I=-\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{3/2}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)-\frac{4}{9}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{3/2}\right]+C=$$
$$=\frac{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}{9x^3}\left[2-3\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right]+C.$$

**4.3.14.** $I=\int \sin x \ln \operatorname{tg} x\, dx.$

**4.3.15.** $I=\int \ln\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right)dx.$

Решение. Положим

$$u=\ln\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right);\quad dv=dx,$$

откуда

$$du=\frac{1}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}\left(-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}+\frac{1}{2\sqrt{1+x}}\right)dx=$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}\cdot\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x\sqrt{1-x^2}}\,dx;$$
$$v=x.$$

Следовательно,

$$I=x\ln\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right)-\frac{1}{2}\int x\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x\sqrt{1-x^2}}\,dx=$$
$$=x\ln\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right)-\frac{1}{2}\int dx+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=$$
$$=x\ln\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right)-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\arcsin x+C.$$

Замечание. При вычислении последних интегралов нам приходилось применять метод интегрирования по частям последовательно несколько раз. Результат может быть получен быстрее и компактнее, если пользоваться так называемой *обобщенной формулой интегрирования по частям* (или формулой кратного интегрирования по частям)

$$\int u(x)v(x)\,dx=u(x)v_1(x)-u'(x)v_2(x)+u''(x)v_3(x)-\ldots$$
$$\ldots+(-1)^{n-1}u^{(n-1)}(x)v_n(x)-(-1)^{n-1}\int u^{(n)}(x)v_n(x)\,dx,$$

где

$$v_1(x)=\int v(x)\,dx;\quad v_2(x)=\int v_1(x)\,dx;\ \ldots;\ v_n(x)=\int v_{n-1}(x)\,dx.$$

При этом, конечно, предполагается, что все входящие сюда производные и интегралы существуют.

Применение обобщенной формулы интегрирования по частям особенно выгодно при вычислении интеграла $\int P_n(x)\varphi(x)\,dx$, где $P_n(x)$—целый многочлен степени $n$, а множитель $\varphi(x)$ таков, что его легко интегрировать последовательно $n+1$ раз. Например,

$$\int P_n(x)e^{kx}\,dx=P_n(x)\frac{e^{kx}}{k}-P'_n(x)\frac{e^{kx}}{k^2}+\ldots+(-1)^n P_n^{(n)}(x)\frac{e^{kx}}{k^{n+1}}+C=$$
$$=e^{kx}\left[\frac{P_n(x)}{k}-\frac{1}{k^2}P'_n(x)+\ldots+\frac{(-1)^n}{k^{n+1}}P_n^{(n)}(x)\right]+C.$$

**4.3.16.** С помощью обобщенной формулы интегрирования по частям найти интегралы

а) $\int (x^3-2x^2+3x-1)\cos 2x\,dx$,

б) $\int (2x^3+3x^2-8x+1)\sqrt{2x+6}\,dx$.

Решение.

а) $$\int (x^3-2x^2+3x-1)\cos 2x\,dx=(x^3-2x^2+3x-1)\frac{\sin 2x}{2}-$$
$$-(3x^2-4x+3)\left(-\frac{\cos 2x}{4}\right)+(6x-4)\left(-\frac{\sin 2x}{8}\right)-6\frac{\cos 2x}{16}+C=$$
$$=\frac{\sin 2x}{4}(2x^3-4x^2+3x)+\frac{\cos 2x}{8}(6x^2-8x+3)+C;$$

б) $$\int (2x^3+3x^2-8x+1)\sqrt{2x+6}\,dx=$$
$$=(2x^3+3x^2-8x+1)\frac{(2x+6)^{3/2}}{3}-(6x^2+6x-8)\frac{(2x+6)^{5/2}}{3\cdot 5}+$$
$$+(12x+6)\frac{(2x+6)^{7/2}}{3\cdot 5\cdot 7}-12\frac{(2x+6)^{9/2}}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}+C=$$
$$=\frac{\sqrt{2x+6}}{5\cdot 7\cdot 9}(2x+6)(70x^3-45x^2-396x+897)+C.$$

Найти интегралы:

**4.3.17.** $\int \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx$.

**4.3.18.** $\int \sqrt[3]{x}(\ln x)^2\,dx$.

**4.3.19.** $\int \frac{\arcsin x\,dx}{\sqrt{1+x}}$.

**4.3.20.** $\int \frac{x\cos x\,dx}{\sin^3 x}$.

**4.3.21.** $\int 3^x\cos x\,dx$.

**4.3.22.** $\int (x^3-2x^2+5)e^{3x}\,dx$.

**4.3.23.** $\int (1+x^2)^2\cos x\,dx$.

**4.3.24.** $\int (x^2+2x-1)\sin 3x\,dx$.

**4.3.25.** $\int (x^2-2x+3)\ln x\,dx$.

**4.3.26.** $\int x^3\operatorname{arctg} x\,dx$.

**4.3.27.** $\int x^2\arccos x\,dx$.

**4.3.28.** С помощью формулы кратного интегрирования по частям вычислить следующие интегралы:

а) $\int (3x^2+x-2)\sin^2(3x+1)\,dx$; б) $\int \frac{x^2-7x+1}{\sqrt[3]{2x+1}}\,dx$.