§ 4.4. Рекуррентные формулы

Рекуррентные формулы дают возможность свести интеграл, зависящий от индекса $n > 0$, к интегралу того же типа с меньшим индексом.

4.4.1. С помощью интегрирования по частям вывести рекуррентные формулы для вычисления интегралов:

а) $I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$; б) $I_{n,-m} = \int \frac{\sin^n x}{\cos^m x} dx$;

в) $I_n = \int (a^2 - x^2)^n dx$.

Решение. а) Будем интегрировать по частям. Положим

$$u = \frac{1}{(x^2+a^2)^n}, \qquad dv = dx,$$

откуда

$$du = -\frac{2n\,x\,dx}{(x^2+a^2)^{n+1}}, \qquad v = x.$$

Следовательно,

$$I_n = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n \int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}} dx =$$

$$= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n \int \frac{(x^2+a^2)-a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}} dx = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2nI_n - 2na^2 I_{n+1},$$

откуда

$$I_{n+1} = \frac{1}{2na^2} \cdot \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{1}{a^2} I_n.$$

Полученная формула сводит вычисление интеграла I_{n+1} к вычислению интеграла I_n с меньшим на единицу индексом и, следовательно, позволяет полностью вычислить интеграл с натуральным индексом, так как

$$I_1 = \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$$

Например, полагая $n = 1$, получим

$$I_2 = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{2a^2} \cdot \frac{x}{x^2+a^2} + \frac{1}{2a^2} I_1 =$$

$$= \frac{1}{2a^2} \frac{x}{x^2+a^2} + \frac{1}{2a^3} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C;$$

полагая $n = 2$, получим

$$I_3 = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^3} = \frac{1}{4a^2} \cdot \frac{x}{(x^2+a^2)^2} + \frac{3}{4a^2} I_2 =$$

$$= \frac{1}{4a^2} \cdot \frac{x}{(x^2+a^2)^2} + \frac{3}{8a^4} \cdot \frac{x}{x^2+a^2} + \frac{3}{8a^5} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$$

б) Применим метод интегрирования по частям, положив

$$u = \sin^{n-1} x; \qquad dv = \frac{\sin x}{\cos^m x} dx,$$

откуда

$$du = (n-1)\sin^{n-2} x \cos x\, dx; \qquad v = \frac{1}{(m-1)\cos^{m-1} x} \qquad (m \neq 1).$$

Следовательно,

$$I_{n,\,-m} = \frac{\sin^{n-1} x}{(m-1)\cos^{m-1} x} - \frac{n-1}{m-1}\int \frac{\sin^{n-2} x\, dx}{\cos^{m-2} x} =$$

$$= \frac{\sin^{n-1} x}{(m-1)\cos^{m-1} x} - \frac{n-1}{m-1} I_{n-2,\,2-m} \qquad (m \neq 1).$$

в) Интегрируем по частям, положив

$$u = (a^2 - x^2)^n; \qquad dv = dx,$$

откуда

$$du = -2nx(a^2 - x^2)^{n-1}\, dx; \qquad v = x.$$

Следовательно,

$$I_n = x(a^2 - x^2)^n + 2n\int x^2 (a^2 - x^2)^{n-1}\, dx =$$

$$= x(a^2 - x^2)^n + 2n\int (x^2 - a^2 + a^2)(a^2 - x^2)^{n-1}\, dx =$$

$$= x(a^2 - x^2)^n - 2nI_n + 2na^2 I_{n-1}.$$

Отсюда, приведя подобные члены, получим

$$(1 + 2n) I_n = x(a^2 - x^2)^n + 2na^2 I_{n-1}.$$

Следовательно,

$$I_n = \frac{x(a^2 - x^2)^n}{2n+1} + \frac{2na^2}{2n+1} I_{n-1}.$$

Например, заметив, что

$$I_{-1/2} = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C,$$

мы можем последовательно найти

$$I_{1/2} = \int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{x}{2}(a^2 - x^2)^{1/2} + \frac{a^2}{2} I_{-1/2} =$$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C,$$

$$I_{3/2} = \int (a^2 - x^2)^{3/2}\, dx = \frac{x}{4}(a^2 - x^2)^{3/2} + \frac{3}{4} a^2 I_{1/2}, \text{ и т. д.}$$

4.4.2. Применяя интегрирование по частям, получить следующие рекуррентные формулы:

а) $I_n = \int (\ln x)^n\, dx = x(\ln x)^n - nI_{n-1}$;

б) $I_n = \int x^\alpha (\ln x)^n\, dx = \dfrac{x^{\alpha+1}(\ln x)^n}{\alpha+1} - \dfrac{n}{\alpha+1} I_{n-1} \quad (\alpha \neq -1)$;

в) $I_n = \int x^n e^x\, dx = x^n e^x - nI_{n-1}$;

г) $I_n = \int e^{\alpha x} \sin^n x \, dx =$

$$= \frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2 + n^2} \sin^{n-1} x (\alpha \sin x - n \cos x) + \frac{n(n-1)}{\alpha^2 + n^2} I_{n-2}.$$

4.4.3. Вывести рекуррентную формулу для вычисления интеграла $I_n = \int \frac{dx}{\sin^n x}$ и воспользоваться ею для вычисления интеграла $I_3 = \int \frac{dx}{\sin^3 x}$.

4.4.4. Вывести рекуррентные формулы для вычисления интегралов:

а) $I_n = \int \operatorname{tg}^n x \, dx$; б) $I_n = \int \operatorname{ctg}^n x \, dx$; в) $I_n = \int \frac{x^n \, dx}{\sqrt{x^2 + a}}$.