Глава V

Основные классы интегрируемых функций

§ 5.1. Интегрирование рациональных функций

Если знаменатель $Q(x)$ *правильной* рациональной дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$ может быть представлен следующим образом:

$$Q(x)=(x-a)^k(x-b)^l\ldots(x^2+\alpha x+\beta)^r(x^2+\gamma x+\mu)^s\ldots,$$

причем фигурирующие здесь двучлены и трехчлены различны и, кроме того, трехчлены не имеют действительных корней, то

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{A_k}{(x-a)^k}+$$
$$+\frac{B_1}{x-b}+\frac{B_2}{(x-b)^2}+\ldots+\frac{B_l}{(x-b)^l}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{M_1x+N_1}{x^2+\alpha x+\beta}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+\alpha x+\beta)^2}+\ldots+\frac{M_rx+N_r}{(x^2+\alpha x+\beta)^r}+$$
$$+\frac{R_1x+L_1}{x^2+\gamma x+\mu}+\frac{R_2x+L_2}{(x^2+\gamma x+\mu)^2}+\ldots+\frac{R_sx+L_s}{(x^2+\gamma x+\mu)^s}+\ldots,$$

где $A_1, A_2, \ldots, B_1, B_2, \ldots, M_1, N_1, M_2, N_2, \ldots, R_1, L_1, R_2, L_2, \ldots$ — некоторые действительные постоянные, подлежащие определению. Для их определения обе части последнего тождества приводят к целому виду, а затем приравнивают коэффициенты при одинаковых степенях переменной x, что дает систему линейных уравнений относительно коэффициентов. (Этот метод называется *методом сравнения коэффициентов.*) Можно также получать систему уравнений для коэффициентов, подставляя в обе части тождества подходящим образом подобранные числовые значения x. (Этот метод называется *методом частных значений.*) При некоторых навыках удачная комбинация указанных приемов часто позволяет упростить процесс отыскания коэффициентов.

В случае, когда рациональная дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ *неправильная*, следует предварительно выделить целую часть.

5.1.1.

$$I=\int\frac{15x^2-4x-81}{(x-3)(x+4)(x-1)}\,dx.$$

Решение. Подынтегральная функция — правильная рациональная дробь. Все корни знаменателя действительные и простые, поэтому подынтегральная функция представится в виде суммы трех простейших дробей вида

$$\frac{15x^2-4x-81}{(x-3)(x+4)(x-1)}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x+4}+\frac{D}{x-1},$$

где A, B, D — коэффициенты, подлежащие определению. Приводя к общему знаменателю и отбрасывая его, получим тождество

$$15x^2-4x-81=A(x+4)(x-1)+B(x-3)(x-1)+$$
$$+D(x-3)(x+4). \quad (*)$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях тождества, получим систему уравнений для определения коэффициентов

$$A+B+D=15; \quad 3A-4B+D=-4; \quad -4A+3B-12D=-81.$$

Решая систему уравнений, найдем $A=3$, $B=5$, $D=7$.

Следовательно,

$$I=3\int\frac{dx}{x-3}+5\int\frac{dx}{x+4}+7\int\frac{dx}{x-1}=$$
$$=3\ln|x-3|+5\ln|x+4|+7\ln|x-1|+C=$$
$$=\ln|(x-3)^3(x+4)^5(x-1)^7|+C.$$

Замечание. Покажем на этом же примере применение метода частных значений.

Тождество $(*)$ справедливо при любом значении x. Поэтому, задав три каких-нибудь частных значения, получим три уравнения для определения трех неопределенных коэффициентов. Удобнее всего в качестве значений x выбирать корни знаменателя, так как они обращают в нуль часть сомножителей. Полагая в тождестве $(*)$ $x=3$, получим $A=3$; полагая $x=-4$, получим $B=5$; полагая $x=1$, получим $D=7$.

5.1.2. $I=\int\frac{x^4\,dx}{(2+x)(x^2-1)}$.

5.1.3. $I=\int\frac{x^4-3x^2-3x-2}{x^3-x^2-2x}\,dx$.

Решение. Так как степень числителя выше степени знаменателя, т. е. дробь неправильная, то нужно выделить целую часть. Разделив числитель на знаменатель, получим

$$\frac{x^4-3x^2-3x-2}{x^3-x^2-2x}=x+1-\frac{x+2}{x(x^2-x-2)}.$$

Следовательно,

$$I=\int\frac{x^4-3x^2-3x-2}{x^3-x^2-2x}\,dx=\int(x+1)\,dx-\int\frac{(x+2)\,dx}{x(x-2)(x+1)}.$$

Разлагаем оставшуюся правильную дробь на простейшие:

$$\frac{x+2}{x(x-2)(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{D}{x+1}.$$

Отсюда

$$x+2=A(x-2)(x+1)+Bx(x+1)+Dx(x-2).$$

Подставив поочередно в правой и левой частях равенства значения $x_1=0$, $x_2=2$, $x_3=-1$ (корни знаменателя), получим

$$A=-1;\quad B=2/3;\quad D=1/3.$$

Итак,

$$I=\int(x+1)\,dx+\int\frac{dx}{x}-\frac{2}{3}\int\frac{dx}{x-2}-\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x+1}=$$
$$=\frac{x^2}{2}+x+\ln|x|-\frac{2}{3}\ln|x-2|-\frac{1}{3}\ln|x+1|+C.$$

5.1.4. $I=\int\frac{2x^2-3x+3}{x^3-2x^2+x}\,dx.$

Решение. Здесь под знаком интеграла стоит правильная рациональная дробь, у которой корни знаменателя действительные, но среди них есть кратные:

$$x^3-2x^2+x=x(x-1)^2.$$

Следовательно, разложение на простейшие дроби имеет вид

$$\frac{2x^2-3x+3}{x^3-2x^2+x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{D}{x-1}.$$

Отсюда получаем тождество:

$$2x^2-3x+3\equiv A(x-1)^2+Bx+Dx(x-1)=$$
$$=(A+D)x^2+(-2A-D+B)x+A. \tag{*}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим систему уравнений для определения коэффициентов A, B, D:

$$A+D=2;\quad -2A-D+B=-3;\quad A=3.$$

Отсюда $A=3$; $B=2$; $D=-1$.

Таким образом,

$$I=3\int\frac{dx}{x}+2\int\frac{dx}{(x-1)^2}-\int\frac{dx}{x-1}=3\ln|x|-\frac{2}{x-1}-\ln|x-1|+C.$$

Замечание. Некоторое упрощение при определении коэффициентов получается, если в тождестве (*) положить $x_1=0$; $x_2=1$ (корни знаменателя), а x_3 — равным любому значению.

При $x=0$ получим $3=A$; при $x=1$ получим $2=B$; при $x=2$ получим $5=A+2B+2D$; $5=3+4+2D$; отсюда $D=-1$.

5.1.5. $I=\int\frac{x^3+1}{x(x-1)^3}\,dx.$

5.1.6. $I=\int\frac{x\,dx}{x^3+1}.$

Решение. Так как $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$, причем второй сомножитель не разлагается на действительные множители первой степени, то разложение данной дроби будет иметь вид

$$\frac{x}{x^3+1}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+D}{x^2-x+1}.$$

Отсюда

$$x=A(x^2-x+1)+(Bx+D)(x+1)=$$
$$=(A+B)x^2+(-A+B+D)x+(A+D).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим

$$A=-1/3;\quad B=1/3;\quad D=1/3.$$

Таким образом,

$$I=-\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x+1}+\frac{1}{3}\int\frac{x+1}{x^2-x+1}\,dx=-\frac{1}{3}\ln|x+1|+\frac{1}{3}I_1.$$

Для вычисления интеграла

$$I_1=\int\frac{x+1}{x^2-x+1}\,dx$$

выделим в знаменателе полный квадрат:

$$x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$$

и сделаем подстановку $x-1/2=t$. Тогда

$$I_1=\int\frac{t+\frac{1}{2}+1}{t^2+\frac{3}{4}}\,dt=\int\frac{t\,dt}{t^2+\frac{3}{4}}+\frac{3}{2}\int\frac{dt}{t^2+\frac{3}{4}}=$$
$$=\frac{1}{2}\ln\left(t^2+\frac{3}{4}\right)+\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2t}{\sqrt{3}}+C.$$

Возвращаясь к переменной x, получим

$$I_1=\frac{1}{2}\ln(x^2-x+1)+\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$$

Таким образом,

$$I=\int\frac{x}{x^3+1}\,dx=$$
$$=-\frac{1}{3}\ln|x+1|+\frac{1}{6}\ln(x^2-x+1)+\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$$

5.1.7. $I=\int\frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$.

Решение. Знаменатель дроби имеет две пары различных комплексных сопряженных корней, поэтому

$$\frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{Dx+E}{x^2+4},$$

отсюда

$$1=(Ax+B)(x^2+4)+(Dx+E)(x^2+1).$$

Здесь удобно применить метод частных значений для определения коэффициентов, так как комплексные корни знаменателя достаточно простые ($x=\pm i$ и $x=\pm 2i$).

Полагая $x=i$, получим

$$3B+3Ai=1,$$

откуда $A=0$, $B=1/3$. Полагая $x=2i$, получим $-3E-6Di=1$, откуда $D=0$, $E=-1/3$. Таким образом,

$$\int\frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x^2+1}-\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x^2+4}=$$
$$=\frac{1}{3}\operatorname{arctg}x-\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C.$$

5.1.8. $I=\int\frac{(x+1)\,dx}{(x^2+x+2)(x^2+4x+5)}$.

5.1.9. $I=\int\frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{(x^2+2x+3)^2(x+1)}\,dx.$

Решение. Здесь мы имеем уже кратные комплексные корни. Разлагаем дробь на простейшие дроби:

$$\frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{(x^2+2x+3)^2(x+1)}=\frac{Ax+B}{(x^2+2x+3)^2}+\frac{Dx+E}{x^2+2x+3}+\frac{F}{x+1}.$$

Находим коэффициенты:

$$A=1;\quad B=-1;\quad D=0;\quad E=0;\quad F=1.$$

Следовательно,

$$I=\int\frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{(x^2+2x+3)^2(x+1)}\,dx=$$
$$=\int\frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2}\,dx+\int\frac{dx}{x+1}=\ln|x+1|+I_1.$$

Вычислим $I_1=\int\frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2}\,dx.$

Так как $x^2+2x+3=(x+1)^2+2$, то сделаем подстановку $x+1=t$. Тогда получим

$$I_1=\int\frac{t-2}{(t^2+2)^2}\,dt=\int\frac{t}{(t^2+2)^2}\,dt-2\int\frac{dt}{(t^2+2)^2}=$$
$$=-\frac{1}{2(t^2+2)}-2I_2.$$

Интеграл

$$I_2=\int\frac{dt}{(t^2+2)^2}$$

вычислим по рекуррентной формуле (см. **4.4.1**):

$$I_2=\frac{1}{4}\,\frac{t}{t^2+2}+\frac{1}{4}\int\frac{dt}{t^2+2}=\frac{1}{4}\,\frac{t}{t^2+2}+\frac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}}+C.$$

Таким образом

$$I_1=-\frac{1}{2(t^2+2)}-\frac{t}{2(t^2+2)}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}}+C.$$

Возвращаясь к переменной x, получим

$$I_1=-\frac{1}{2(x^2+2x+3)}-\frac{x+1}{2(x^2+2x+3)}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C.$$

Окончательно получим

$$I=\int\frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{(x^2+2x+3)^2(x+1)}\,dx=$$

$$=\ln|x+1|-\frac{x+2}{2(x^2+2x+3)}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C.$$

Найти интегралы:

5.1.10. $\int\frac{5x^3+9x^2-22x-8}{x^3-4x}\,dx.$

5.1.11. $\int\frac{dx}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3}.$

5.1.12. $\int\frac{dx}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)}.$

5.1.13. $\int\frac{dx}{(1+x)(1+x^2)(1+x^3)}.$

5.1.14. $\int\frac{x^3+3}{(x+1)(x^2+1)}\,dx.$

§ 5.2. Интегрирование некоторых иррациональных выражений

Некоторые типы интегралов от алгебраических иррациональностей надлежащей заменой переменной могут быть сведены к интегралам от рациональных функций; такое преобразование интеграла принято называть его *рационализацией*.

I. Если под знаком интеграла стоит рациональная функция от дробных степеней независимой переменной x, т. е. функция $R\left(x,\ x^{p_1/q_1},\ \ldots,\ x^{p_k/q_k}\right)$, то рационализация интеграла осуществляется при помощи подстановки $x=t^m$, где m есть наименьшее общее кратное чисел $q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_k$.

II. Если под знаком интеграла стоит рациональная функция от x и дробных степеней дробно-линейной функции вида $\frac{ax+b}{cx+d}$, то рационализация ин-