Интеграл

$$I_2 = \int \frac{dt}{(t^2+2)^2}$$

вычислим по рекуррентной формуле (см. **4.4.1**):

$$I_2 = \frac{1}{4}\,\frac{t}{t^2+2} + \frac{1}{4}\int \frac{dt}{t^2+2} = \frac{1}{4}\,\frac{t}{t^2+2} + \frac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}} + C.$$

Таким образом

$$I_1 = -\frac{1}{2(t^2+2)} - \frac{t}{2(t^2+2)} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}} + C.$$

Возвращаясь к переменной x, получим

$$I_1 = -\frac{1}{2(x^2+2x+3)} - \frac{x+1}{2(x^2+2x+3)} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}} + C.$$

Окончательно получим

$$I = \int \frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{(x^2+2x+3)^2(x+1)}\,dx =$$

$$= \ln|x+1| - \frac{x+2}{2(x^2+2x+3)} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}} + C.$$

Найти интегралы:

5.1.10. $\int \frac{5x^3+9x^2-22x-8}{x^3-4x}\,dx.$

5.1.11. $\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3}.$

5.1.12. $\int \frac{dx}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)}.$

5.1.13. $\int \frac{dx}{(1+x)(1+x^2)(1+x^3)}.$

5.1.14. $\int \frac{x^3+3}{(x+1)(x^2+1)}\,dx.$

§ 5.2. Интегрирование некоторых иррациональных выражений

Некоторые типы интегралов от алгебраических иррациональностей надлежащей заменой переменной могут быть сведены к интегралам от рациональных функций; такое преобразование интеграла принято называть его *рационализацией*.

I. Если под знаком интеграла стоит рациональная функция от дробных степеней независимой переменной x, т. е. функция $R\left(x, x^{p_1/q_1}, \ldots, x^{p_k/q_k}\right)$, то рационализация интеграла осуществляется при помощи подстановки $x = t^m$, где m есть наименьшее общее кратное чисел $q_1, q_2, \ldots, q_k$.

II. Если под знаком интеграла стоит рациональная функция от x и дробных степеней дробно-линейной функции вида $\frac{ax+b}{cx+d}$, то рационализация интеграла осуществляется подстановкой $\frac{ax+b}{cx+d}=t^m$, где m имеет тот же смысл, что и выше.

5.2.1. $I=\int \frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}\,dx.$

Решение. Наименьшее общее кратное чисел 3, 6 равно числу 6, поэтому делаем подстановку:

$$x=t^6, \quad dx=6t^5\,dt,$$

откуда

$$I=6\int \frac{(t^6+t^4+t)\,t^5}{t^6\,(1+t^2)}\,dt=6\int \frac{t^5+t^3+1}{1+t^2}\,dt=$$

$$=6\int t^3\,dt+6\int \frac{dt}{t^2+1}=\frac{3}{2}\,t^4+6\operatorname{arctg} t+C.$$

Возвращаясь к переменной x, получим

$$I=\frac{3}{2}\,x^{2/3}+6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}+C.$$

5.2.2. $I=\int \frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x^5}-\sqrt[6]{x^7}}\,dx.$

5.2.3. $I=\int \frac{(2x-3)^{1/2}\,dx}{(2x-3)^{1/3}+1}.$

Решение. Подынтегральное выражение есть рациональная функция от $\sqrt[6]{2x-3}$, поэтому положим $2x-3=t^6$, откуда

$$dx=3t^5\,dt; \quad (2x-3)^{1/2}=t^3; \quad (2x-3)^{1/3}=t^2.$$

Следовательно,

$$I=\int \frac{3t^8}{t^2+1}\,dt=3\int (t^6-t^4+t^2-1)\,dt+3\int \frac{dt}{1+t^2}=$$

$$=3\,\frac{t^7}{7}-3\,\frac{t^5}{5}+3\,\frac{t^3}{3}-3t+3\operatorname{arctg} t+C.$$

Возвращаясь к переменной x, получим

$$I=3\left[\frac{1}{7}\,(2x-3)^{7/6}-\frac{1}{5}\,(2x-3)^{5/6}+\frac{1}{3}\,(2x-3)^{1/2}-\right.$$

$$\left.-(2x-3)^{1/6}+\operatorname{arctg}\,(2x-3)^{1/6}\right]+C.$$

5.2.4. $I=\int \frac{dx}{x\left(2+\sqrt[3]{(x-1)/x}\right)}.$

5.2.5. $I=\int \frac{2}{(2-x)^2}\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}\,dx.$

Решение. Подынтегральное выражение есть рациональная функция от переменной x и от выражения $\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}$, поэтому введем подстановку:

$$\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}=t; \quad \frac{2-x}{2+x}=t^3,$$

откуда

$$x=\frac{2-2t^3}{1+t^3}; \quad 2-x=\frac{4t^3}{1+t^3}; \quad dx=\frac{-12t^2}{(1+t^3)^2}\,dt.$$

Следовательно,

$$I=-\int \frac{2\,(1+t^3)^2\,t\cdot 12t^2}{16t^6\,(1+t^3)^2}\,dt=-\frac{3}{2}\int \frac{dt}{t^3}=\frac{3}{4t^2}+C.$$

Возвращаясь к переменной x, получим

$$I=\frac{3}{4}\sqrt[3]{\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^2}+C.$$

5.2.6. $I=\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-1)^3\,(x+2)^5}}.$

Решение. Так как

$$\sqrt[4]{(x-1)^3\,(x+2)^5}=(x-1)\,(x+2)\sqrt[4]{\frac{x+2}{x-1}},$$

то подынтегральное выражение есть рациональная функция от x и $\sqrt[4]{\frac{x+2}{x-1}}$; поэтому введем подстановку:

$$\sqrt[4]{\frac{x+2}{x-1}}=t; \quad \frac{x+2}{x-1}=t^4,$$

откуда

$$x=\frac{t^4+2}{t^4-1}; \quad x-1=\frac{3}{t^4-1}; \quad x+2=\frac{3t^4}{t^4-1}; \quad dx=\frac{-12t^3}{(t^4-1)^2}\,dt.$$

Следовательно,

$$I=-\int \frac{(t^4-1)\,(t^4-1)\,12t^3\,dt}{3\cdot 3t^4t\,(t^4-1)^2}=-\frac{4}{3}\int \frac{dt}{t^2}=\frac{4}{3t}+C.$$

Возвращаясь к переменной x, получим

$$I=\frac{4}{3}\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+2}}+C.$$

5.2.7. $\int \frac{dx}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}.$

5.2.8. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2 (x-1)^4}}$.

5.2.9. $\int (x-2) \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\, dx$.

§ 5.3. Подстановки Эйлера

Интегралы типа $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx$ вычисляются с помощью одной из трех подстановок Эйлера:

1) $\sqrt{ax^2+bx+c}=t \pm x\sqrt{a}$, если $a>0$;

2) $\sqrt{ax^2+bx+c}=tx \pm \sqrt{c}$, если $c>0$;

3) $\sqrt{ax^2+bx+c}=(x-\alpha)\, t$, если

$$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta),$$

т. е. если α—действительный корень трехчлена ax^2+bx+c.

5.3.1. $I=\int \frac{dx}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}$.

Решение. Здесь $a=1>0$, поэтому применим подстановку

$$\sqrt{x^2+2x+2}=t-x.$$

Возведя в квадрат обе части этого равенства и сделав приведение подобных членов, получим

$$2x+2tx=t^2-2,$$

откуда

$$x=\frac{t^2-2}{2(1+t)}; \qquad dx=\frac{t^2+2t+2}{2(1+t)^2}\,dt;$$

$$1+\sqrt{x^2+2x+2}=1+t-\frac{t^2-2}{2(1+t)}=\frac{t^2+4t+4}{2(1+t)}.$$

Подставив в интеграл, получим

$$I=\int \frac{2(1+t)(t^2+2t+2)}{(t^2+4t+4)\,2(1+t)^2}\,dt=\int \frac{(t^2+2t+2)\,dt}{(1+t)(t+2)^2}.$$

Полученную правильную рациональную дробь разлагаем на простейшие дроби:

$$\frac{t^2+2t+2}{(t+1)(t+2)^2}=\frac{A}{t+1}+\frac{B}{t+2}+\frac{D}{(t+2)^2}.$$

Методом неопределенных коэффициентов находим $A=1$, $B=0$, $D=-2$.

Следовательно,

$$\int \frac{t^2+2t+2}{(t+1)(t+2)^2}\,dt=\int \frac{dt}{t+1}-2\int \frac{dt}{(t+2)^2}=\ln|t+1|+\frac{2}{t+2}+C.$$