5.2.8. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}$.

5.2.9. $\int (x-2)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx$.

§ 5.3. Подстановки Эйлера

Интегралы типа $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$ вычисляются с помощью одной из трех подстановок Эйлера:

1) $\sqrt{ax^2+bx+c}=t \pm x\sqrt{a}$, если $a>0$;
2) $\sqrt{ax^2+bx+c}=tx \pm \sqrt{c}$, если $c>0$;
3) $\sqrt{ax^2+bx+c}=(x-\alpha)t$, если

$$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta),$$

т. е. если α — действительный корень трехчлена ax^2+bx+c.

5.3.1. $I=\int \frac{dx}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}$.

Решение. Здесь $a=1>0$, поэтому применим подстановку

$$\sqrt{x^2+2x+2}=t-x.$$

Возведя в квадрат обе части этого равенства и сделав приведение подобных членов, получим

$$2x+2tx=t^2-2,$$

откуда

$$x=\frac{t^2-2}{2(1+t)};\qquad dx=\frac{t^2+2t+2}{2(1+t)^2}\,dt;$$

$$1+\sqrt{x^2+2x+2}=1+t-\frac{t^2-2}{2(1+t)}=\frac{t^2+4t+4}{2(1+t)}.$$

Подставив в интеграл, получим

$$I=\int \frac{2(1+t)(t^2+2t+2)}{(t^2+4t+4)\,2(1+t)^2}\,dt=\int \frac{(t^2+2t+2)\,dt}{(1+t)(t+2)^2}.$$

Полученную правильную рациональную дробь разлагаем на простейшие дроби:

$$\frac{t^2+2t+2}{(t+1)(t+2)^2}=\frac{A}{t+1}+\frac{B}{t+2}+\frac{D}{(t+2)^2}.$$

Методом неопределенных коэффициентов находим $A=1$, $B=0$, $D=-2$.

Следовательно,

$$\int \frac{t^2+2t+2}{(t+1)(t+2)^2}\,dt=\int \frac{dt}{t+1}-2\int \frac{dt}{(t+2)^2}=\ln|t+1|+\frac{2}{t+2}+C.$$

Возвращаясь к переменной x, получим

$$I = \ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right) + \frac{2}{x+2+\sqrt{x^2+2x+2}} + C.$$

5.3.2. $I = \int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}$.

Решение. Так как здесь $c = 1 > 0$, то можно применить вторую подстановку Эйлера:

$$\sqrt{x^2-x+1} = tx - 1,$$

откуда

$$(2t-1)\,x = (t^2-1)\,x^2; \quad x = \frac{2t-1}{t^2-1}; \qquad dx = -2\,\frac{t^2-t+1}{(t^2-1)^2}\,dt;$$

$$x+\sqrt{x^2-x+1} = \frac{t}{t-1}.$$

Подставив в I, получим интеграл от рациональной дроби:

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}} = \int \frac{-2t^2+2t-2}{t\,(t-1)\,(t+1)^2}\,dt,$$

$$\frac{-2t^2+2t-2}{t\,(t-1)\,(t+1)^2} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t-1} + \frac{D}{(t+1)^2} + \frac{E}{t+1}.$$

По методу неопределенных коэффициентов находим

$$A = 2; \quad B = -1/2; \quad D = -3; \quad E = -3/2.$$

Отсюда

$$I = 2\int\frac{dt}{t} - \frac{1}{2}\int\frac{dt}{t-1} - 3\int\frac{dt}{(t+1)^2} - \frac{3}{2}\int\frac{dt}{t+1} =$$

$$= 2\ln|t| - \frac{1}{2}\ln|t-1| + \frac{3}{t+1} - \frac{3}{2}\ln|t+1| + C,$$

где $t = \frac{\sqrt{x^2-x+1}+1}{x}$.

5.3.3. $I = \int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x-x^2}}$.

5.3.4. $I = \int \frac{x\,dx}{\left(\sqrt{7x-10-x^2}\right)^3}$.

Решение. В данном случае $a < 0$ и $c < 0$, поэтому ни первая, ни вторая подстановки Эйлера неприменимы. Но квадратный трехчлен $7x-10-x^2$ имеет действительные корни $\alpha = 2$, $\beta = 5$, поэтому применим третью подстановку Эйлера:

$$\sqrt{7x-10-x^2} = \sqrt{(x-2)(5-x)} = (x-2)\,t.$$

Отсюда

$$5-x = (x-2)\,t^2;$$

$$x = \frac{5+2t^2}{1+t^2}; \qquad dx = -\frac{6t\,dt}{(1+t^2)^2};$$

$$(x-2)\,t = \left(\frac{5+2t^2}{1+t^2} - 2\right)t = \frac{3t}{1+t^2}.$$

Следовательно,

$$I=-\frac{6}{27}\int\frac{5+2t^2}{t^2}\,dt=-\frac{2}{9}\int\left(\frac{5}{t^2}+2\right)dt=-\frac{2}{9}\left(-\frac{5}{t}+2t\right)+C,$$

где $t=\dfrac{\sqrt{7x-10-x^2}}{x-2}$.

Вычислить следующие интегралы с помощью одной из подстановок Эйлера:

5.3.5. $\displaystyle\int\frac{dx}{x-\sqrt{x^2+2x+4}}$.

5.3.6. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}-1}$.

5.3.7. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{(2x-x^2)^3}}$.

5.3.8. $\displaystyle\int\frac{(x+\sqrt{1+x^2})^{15}}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$.

§ 5.4. Другие методы интегрирования иррациональных выражений

Подстановки Эйлера часто приводят к весьма громоздким выкладкам, поэтому их следует применять лишь тогда, когда трудно подыскать другой способ для вычисления данного интеграла. Для вычисления многих интегралов, принадлежащих к виду

$$\int R\left(x,\ \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx,$$

существуют более простые приемы.

I. Интегралы вида

$$I=\int\frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$$

с помощью подстановки $x+b/(2a)=t$ приводятся к виду

$$I=M_1\int\frac{t\,dt}{\sqrt{at^2+K}}+N_1\int\frac{dt}{\sqrt{at^2+K}},$$

где M_1, N_1, K — новые коэффициенты.

Первый интеграл сводится к интегралу от степенной функции, а второй — табличный, и сводится к логарифму (при $a>0$) или к арксинусу (при $a<0$, $K>0$).

II. Интегралы вида

$$\int\frac{P_m(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx,$$

где $P_m(x)$ — многочлен степени m, вычисляются по формуле приведения:

$$\int\frac{P_m(x)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=P_{m-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c}+K\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},\qquad(1)$$

где $P_{m-1}(x)$ — многочлен степени $m-1$, а K — некоторое постоянное число.