Следовательно,

$$I=-\frac{6}{27}\int\frac{5+2t^2}{t^2}\,dt=-\frac{2}{9}\int\left(\frac{5}{t^2}+2\right)dt=-\frac{2}{9}\left(-\frac{5}{t}+2t\right)+C,$$

где $t=\dfrac{\sqrt{7x-10-x^2}}{x-2}$.

Вычислить следующие интегралы с помощью одной из подстановок Эйлера:

5.3.5. $\displaystyle\int\frac{dx}{x-\sqrt{x^2+2x+4}}$.

5.3.6. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}-1}$.

5.3.7. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{(2x-x^2)^3}}$.

5.3.8. $\displaystyle\int\frac{(x+\sqrt{1+x^2})^{15}}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$.

§ 5.4. Другие методы интегрирования иррациональных выражений

Подстановки Эйлера часто приводят к весьма громоздким выкладкам, поэтому их следует применять лишь тогда, когда трудно подыскать другой способ для вычисления данного интеграла. Для вычисления многих интегралов, принадлежащих к виду

$$\int R\left(x,\ \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx,$$

существуют более простые приемы.

I. Интегралы вида

$$I=\int\frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$$

с помощью подстановки $x+b/(2a)=t$ приводятся к виду

$$I=M_1\int\frac{t\,dt}{\sqrt{at^2+K}}+N_1\int\frac{dt}{\sqrt{at^2+K}},$$

где M_1, N_1, K — новые коэффициенты.

Первый интеграл сводится к интегралу от степенной функции, а второй — табличный, и сводится к логарифму (при $a>0$) или к арксинусу (при $a<0$, $K>0$).

II. Интегралы вида

$$\int\frac{P_m(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx,$$

где $P_m(x)$ — многочлен степени m, вычисляются по формуле приведения:

$$\int\frac{P_m(x)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=P_{m-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c}+K\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \tag{1}$$

где $P_{m-1}(x)$ — многочлен степени $m-1$, а K — некоторое постоянное число.

Коэффициенты многочлена $P_{m-1}(x)$ и постоянное число K находятся методом неопределенных коэффициентов.

III. Интегралы вида

$$\int \frac{dx}{(x-a_1)^m \sqrt{ax^2+bx+c}}$$

сводятся к предыдущему типу подстановкой

$$x-a_1=1/t.$$

IV. Тригонометрические и гиперболические подстановки — см. дальше § 5.7.

5.4.1. $I=\int \frac{(x+3)\,dx}{\sqrt{4x^2+4x-3}}$.

Решение. Сделаем подстановку $2x+1=t$, откуда

$$x=\frac{t-1}{2}, \qquad dx=\frac{1}{2}\,dt.$$

Следовательно,

$$I=\frac{1}{4}\int \frac{(t+5)\,dt}{\sqrt{t^2-4}}=\frac{1}{4}\sqrt{t^2-4}+\frac{5}{4}\ln\left|t+\sqrt{t^2-4}\right|+C.$$

Возвращаясь к переменной x, получим

$$I=\frac{1}{4}\sqrt{4x^2+4x-3}+\frac{5}{4}\ln\left|2x+1+\sqrt{4x^2+4x-3}\right|+C.$$

5.4.2. $I=\int \frac{5x+4}{\sqrt{x^2+2x+5}}\,dx.$

5.4.3. $I=\int \frac{x^3-x-1}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx.$

Решение. Здесь $P_m(x)=x^3-x-1$. Следовательно,

$$P_{m-1}(x)=Ax^2+Bx+D.$$

Будем искать интеграл в виде

$$I=(Ax^2+Bx+D)\sqrt{x^2+2x+2}+K\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}.$$

Дифференцируя последнее равенство, получим

$$I'=\frac{x^3-x-1}{\sqrt{x^2+2x+2}}=$$

$$=(2Ax+B)\sqrt{x^2+2x+2}+(Ax^2+Bx+D)\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}+$$

$$+\frac{K}{\sqrt{x^2+2x+2}}.$$

Приводим к общему знаменателю и приравниваем числители

$$x^3-x-1=(2Ax+B)(x^2+2x+2)+(Ax^2+Bx+D)(x+1)+K.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим систему уравнений:

$$2A+A=1, \quad B+4A+B+A=0;$$

$$2B+4A+D+B=-1; \quad 2B+D+K=-1.$$

Решая систему, получим

$$A={}^1/_3;\ B=-{}^5/_6;\ D={}^1/_6;\ K={}^1/_2.$$

Таким образом,

$$I=\left(\frac{1}{3}x^2-\frac{5}{6}x+\frac{1}{6}\right)\sqrt{x^2+2x+2}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}},$$

где

$$I_1=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2+1}}=\ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right)+C.$$

5.4.4. $I=\int\sqrt{4x^2-4x+3}\,dx.$

Решение. Преобразуем интеграл к виду

$$I=\int\frac{4x^2-4x+3}{\sqrt{4x^2-4x+3}}\,dx=(Ax+B)\sqrt{4x^2-4x+3}+K\int\frac{dx}{\sqrt{4x^2-4x+3}}.$$

Методом неопределенных коэффициентов получим

$$I=\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\right)\sqrt{4x^2-4x+3}+\int\frac{dx}{\sqrt{(2x-1)^2+2}}=$$

$$=\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\right)\sqrt{4x^2-4x+3}+\frac{1}{2}\ln\left(2x-1+\sqrt{4x^2-4x+3}\right)+C.$$

5.4.5. $\int\frac{9x^3-3x^2+2}{\sqrt{3x^2-2x+1}}\,dx.$

5.4.6. $\int\sqrt{x^2+x+1}\,dx.$

5.4.7. $I=\int\frac{(x+4)\,dx}{(x-1)(x+2)^2\sqrt{x^2+x+1}}.$

Решение. Представим интеграл так:

$$\int\frac{(x+4)\,dx}{(x-1)(x+2)^2\sqrt{x^2+x+1}}=\int\frac{x+4}{(x-1)(x+2)^2}\cdot\frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}.$$

Разложим дробь $\frac{x+4}{(x-1)(x+2)^2}$ на простейшие дроби

$$\frac{x+4}{(x-1)(x+2)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x+2)^2}+\frac{D}{x+2}.$$

Найдем коэффициенты

$$A={}^5/_9;\ B=-{}^2/_3;\ D=-{}^5/_9.$$

Следовательно,

$$I=\int\left[\frac{5}{9(x-1)}-\frac{2}{3(x+2)^2}-\frac{5}{9(x+2)}\right]\cdot\frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}=$$
$$=\frac{5}{9}\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+x+1}}-\frac{2}{3}\int\frac{dx}{(x+2)^2\sqrt{x^2+x+1}}-$$
$$-\frac{5}{9}\int\frac{dx}{(x+2)\sqrt{x^2+x+1}}.$$

Первый интеграл вычисляется подстановкой $x-1=1/t$, второй и третий — подстановкой $x+2=1/t$. Предоставляем читателю самостоятельно решить этот пример.

5.4.8. $\int\frac{x^3-6x^2+11x-6}{\sqrt{x^2+4x+3}}\,dx.$

5.4.9. $\int\frac{3x^3+5x^2-7x+9}{\sqrt{2x^2+5x+7}}\,dx.$

5.4.10. $\int\frac{dx}{(x+1)^5\sqrt{x^2+2x}}.$

5.4.11. $\int\frac{x\,dx}{(x^2-3x+2)\sqrt{x^2-4x+3}}.$

5.4.12. $\int\frac{dx}{(x+1)^3\sqrt{x^2+3x+2}}.$

5.4.13. $\int\frac{(x^2-1)\,dx}{x\sqrt{1+3x^2+x^4}}.$

§ 5.5. Интегрирование биномиального дифференциала

Интеграл $\int x^m(a+bx^n)^p\,dx$, где m, n, p — рациональные числа, выражается через элементарные функции только в следующих трех случаях.

Случай I. p — целое. Тогда, если $p>0$, подынтегральное выражение развертывается по формуле бинома Ньютона; если же $p<0$, то полагаем $x=t^k$, где k — общий знаменатель дробей m и n.

Случай II. $\frac{m+1}{n}$ — целое. Полагаем $a+bx^n=t^\alpha$, где α — знаменатель дроби p.

Случай III. $\frac{m+1}{n}+p$ — целое. Полагаем $a+bx^n=t^\alpha x^n$, где α — знаменатель дроби p.