Разложим дробь $\frac{x+4}{(x-1)(x+2)^2}$ на простейшие дроби

$$\frac{x+4}{(x-1)(x+2)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x+2)^2}+\frac{D}{x+2}.$$

Найдем коэффициенты

$$A={}^5/_9;\ B=-{}^2/_3;\ D=-{}^5/_9.$$

Следовательно,

$$I=\int\left[\frac{5}{9(x-1)}-\frac{2}{3(x+2)^2}-\frac{5}{9(x+2)}\right]\cdot\frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}=$$
$$=\frac{5}{9}\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+x+1}}-\frac{2}{3}\int\frac{dx}{(x+2)^2\sqrt{x^2+x+1}}-$$
$$-\frac{5}{9}\int\frac{dx}{(x+2)\sqrt{x^2+x+1}}.$$

Первый интеграл вычисляется подстановкой $x-1=1/t$, второй и третий — подстановкой $x+2=1/t$. Предоставляем читателю самостоятельно решить этот пример.

5.4.8. $\int\frac{x^3-6x^2+11x-6}{\sqrt{x^2+4x+3}}\,dx.$

5.4.9. $\int\frac{3x^3+5x^2-7x+9}{\sqrt{2x^2+5x+7}}\,dx.$

5.4.10. $\int\frac{dx}{(x+1)^5\sqrt{x^2+2x}}.$

5.4.11. $\int\frac{x\,dx}{(x^2-3x+2)\sqrt{x^2-4x+3}}.$

5.4.12. $\int\frac{dx}{(x+1)^3\sqrt{x^2+3x+2}}.$

5.4.13. $\int\frac{(x^2-1)\,dx}{x\sqrt{1+3x^2+x^4}}.$

§ 5.5. Интегрирование биномиального дифференциала

Интеграл $\int x^m(a+bx^n)^p\,dx$, где m, n, p — рациональные числа, выражается через элементарные функции только в следующих трех случаях.

Случай I. p — целое. Тогда, если $p>0$, подынтегральное выражение развертывается по формуле бинома Ньютона; если же $p<0$, то полагаем $x=t^k$, где k — общий знаменатель дробей m и n.

Случай II. $\frac{m+1}{n}$ — целое. Полагаем $a+bx^n=t^\alpha$, где α — знаменатель дроби p.

Случай III. $\frac{m+1}{n}+p$ — целое. Полагаем $a+bx^n=t^\alpha x^n$, где α — знаменатель дроби p.

5.5.1. $I=\int \sqrt[3]{x}\,(2+\sqrt{x})^2dx.$

Решение. $I=\int x^{1/3}(2+x^{1/2})^2\,dx.$ Здесь $p=2$ — целое число, значит, имеем случай I.

$$I=\int x^{1/3}(x+4x^{1/2}+4)\,dx=\int (x^{4/3}+4x^{5/6}+4x^{1/3})\,dx=$$
$$=\frac{3}{7}x^{7/3}+\frac{24}{11}x^{11/6}+3x^{4/3}+C.$$

5.5.2. $I=\int x^{-2/3}(1+x^{2/3})^{-1}\,dx.$

5.5.3. $I=\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx.$

Решение. $I=\int x^{-2/3}(1+x^{1/3})^{1/2}dx.$

Здесь $m=-2/3$; $n=1/3$; $p=1/2$; $(m+1)/n=(-2/3+1)/(1/3)=$ $=1$ — целое число.

Имеем случай II. Применим подстановку

$$1+x^{1/3}=t^2;\quad \frac{1}{3}x^{-2/3}dx=2t\,dt.$$

Следовательно,

$$I=6\int t^2\,dt=2t^3+C=2\,(1+x^{1/3})^{3/2}+C.$$

5.5.4. $I=\int x^{1/3}(2+x^{2/3})^{1/4}\,dx.$

5.5.5. $I=\int x^5(1+x^2)^{2/3}\,dx.$

5.5.6. $I=\int x^{-11}(1+x^4)^{-1/2}\,dx.$

Решение. Здесь $p=-1/2$ — дробное число, $(m+1)/n=$ $=(-11+1)/4=-5/2$ — дробное число, но $(m+1)/n+p=-5/2-$ $-1/2=-3$ — целое число. Имеем случай III. Полагаем $1+x^4=x^4t^2$. Отсюда

$$x=\frac{1}{(t^2-1)^{1/4}};\qquad dx=-\frac{t\,dt}{2\,(t^2-1)^{5/4}}.$$

Подставив эти выражения в интеграл, получим

$$I=-\frac{1}{2}\int (t^2-1)^{11/4}\left(\frac{t^2}{t^2-1}\right)^{-1/2}\frac{t\,dt}{(t^2-1)^{5/4}}=-\frac{1}{2}\int (t^2-1)^2\,dt=$$
$$=-t^5/10+t^3/3-t/2+C.$$

Возвращаясь к переменной x, получим

$$I=-\frac{1}{10x^{10}}\sqrt{(1+x^4)^5}+\frac{1}{3x^6}\sqrt{(1+x^4)^3}-\frac{1}{2x^2}\sqrt{1+x^4}+C.$$

5.5.7. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx.$

5.5.8. $\int \frac{dx}{x\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^2}.$

5.5.9. $\int x^3 (1+x^2)^{1/2}\,dx.$

5.5.10. $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}.$

5.5.11. $\int \sqrt[3]{x}\,\sqrt[7]{1+\sqrt[3]{x^4}}\,dx.$

5.5.12. $\int \frac{dx}{x^3\sqrt[5]{1+\frac{1}{x}}}.$

§ 5.6. Интегрирование тригонометрических и гиперболических функций

I. Интегралы вида

$$I=\int \sin^m x\cos^n x\,dx,$$

где m, n — рациональные числа, приводятся к интегралу от биномиального дифференциала

$$I=\int t^m (1-t^2)^{\frac{n-1}{2}}\,dt,\quad t=\sin x$$

и поэтому интегрируются в элементарных функциях только в трех случаях

1) n — нечетное ($(n-1)/2$ — целое),
2) m — нечетное ($(m+1)/2$ — целое),
3) $m+n$ — четное ($(m+1)/2+(n-1)/2$ — целое).

Если число n нечетное, применяется подстановка

$$\sin x=t.$$

Если число m нечетное, применяется подстановка

$$\cos x=t.$$

Если сумма чисел $m+n$ — четная, применяется подстановка

$$\operatorname{tg} x=t\quad (\text{или } \operatorname{ctg} x=t).$$

В частности, такая подстановка удобна для интегралов

$$\int \operatorname{tg}^n x\,dx\quad \left(\text{или } \int \operatorname{ctg}^n x\,dx\right),$$

где n — целое положительное число. Но последняя подстановка неудобна, если оба числа m и n положительны. Если m и n — неотрицательные четные числа, то удобнее метод понижения степени с помощью тригонометрических преобразований:

$$\cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x),\ \sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$$

или $\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x.$