**5.5.7.** $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\, dx.$

**5.5.8.** $\int \frac{dx}{x\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^2}.$

**5.5.9.** $\int x^3 (1+x^2)^{1/2}\, dx.$

**5.5.10.** $\int \frac{dx}{x^4 \sqrt{1+x^2}}.$

**5.5.11.** $\int \sqrt[3]{x}\, \sqrt[7]{1+\sqrt[3]{x^4}}\, dx.$

**5.5.12.** $\int \frac{dx}{x^3 \sqrt[5]{1+\frac{1}{x}}}.$

## § 5.6. Интегрирование тригонометрических и гиперболических функций

I. Интегралы вида

$$I=\int \sin^m x \cos^n x\, dx,$$

где $m$, $n$ — рациональные числа, приводятся к интегралу от биномиального дифференциала

$$I=\int t^m (1-t^2)^{\frac{n-1}{2}}\, dt, \quad t=\sin x$$

и поэтому интегрируются в элементарных функциях только в трех случаях

1) $n$ — нечетное ($(n-1)/2$ — целое),
2) $m$ — нечетное ($(m+1)/2$ — целое),
3) $m+n$ — четное ($(m+1)/2+(n-1)/2$ — целое).

Если число $n$ нечетное, применяется подстановка

$$\sin x = t.$$

Если число $m$ нечетное, применяется подстановка

$$\cos x = t.$$

Если сумма чисел $m+n$ — четная, применяется подстановка

$$\operatorname{tg} x = t \quad (\text{или } \operatorname{ctg} x = t).$$

В частности, такая подстановка удобна для интегралов

$$\int \operatorname{tg}^n x\, dx \quad \left(\text{или } \int \operatorname{ctg}^n x\, dx\right),$$

где $n$ — целое положительное число. Но последняя подстановка неудобна, если оба числа $m$ и $n$ положительны. Если $m$ и $n$ — неотрицательные четные числа, то удобнее метод понижения степени с помощью тригонометрических преобразований:

$$\cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x), \ \sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$$

или $\sin x \cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$.

**5.6.1.** $I=\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}\,dx.$

Решение. Здесь $m=3$ — нечетное число. Полагаем $\cos x=t$, $\sin x\,dx=-dt$, что дает

$$I=-\int (1-t^2)\,t^{-2/3}\,dt=-3t^{1/3}+\frac{3}{7}t^{7/3}+C=$$
$$=3\sqrt[3]{\cos x}\left(\frac{1}{7}\cos^2 x-1\right)+C.$$

**5.6.2.** $I=\int \frac{\cos^3 x}{\sin^6 x}\,dx.$

**5.6.3.** $I=\int \sin^4 x\cos^6 x\,dx.$

Решение. Здесь оба числа $m$, $n$ — четные положительные. Применяем метод понижения степени:

$$I=\frac{1}{16}\int (2\sin x\cos x)^4\cos^2 x\,dx=$$
$$=\frac{1}{32}\int \sin^4 2x\,(1+\cos 2x)\,dx=I_1+I_2.$$

Второй из полученных интегралов вычисляется подстановкой

$$\sin 2x=t,\quad \cos 2x\,dx=\frac{1}{2}\,dt,$$

$$I_2=\frac{1}{32}\int \sin^4 2x\cos 2x\,dx=\frac{1}{64}\int t^4\,dt=\frac{t^5}{320}+C=\frac{1}{320}\sin^5 2x+C.$$

К первому интегралу снова применяем метод понижения степени:

$$I_1=\frac{1}{32}\int \sin^4 2x\,dx=\frac{1}{128}\int (1-\cos 4x)^2\,dx=$$
$$=\frac{1}{128}\left(x-\frac{1}{2}\sin 4x\right)+\frac{1}{256}\int (1+\cos 8x)\,dx=$$
$$=\frac{3}{256}x-\frac{1}{256}\sin 4x+\frac{1}{2048}\sin 8x+C.$$

Итак, окончательно,

$$I=\frac{3}{256}x-\frac{1}{256}\sin 4x+\frac{1}{2048}\sin 8x+\frac{1}{320}\sin^5 2x+C.$$

**5.6.4.** $I=\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}\,dx.$

Решение. Здесь оба числа $m$, $n$ — четные, но одно из них отрицательно. Поэтому полагаем

$$\operatorname{tg} x=t;\quad \frac{1}{\cos^2 x}=1+t^2;\quad \frac{dx}{\cos^2 x}=dt.$$

Следовательно,

$$I=\int t^2(1+t^2)\,dt=\frac{t^3}{3}+\frac{t^5}{5}+C=\frac{\operatorname{tg}^3 x}{3}+\frac{\operatorname{tg}^5 x}{5}+C.$$

**5.6.5.** $I=\int \frac{\cos^4 x}{\sin^2 x}\,dx.$

Решение. Здесь можно положить $\operatorname{ctg} x=t$. Но проще интегрировать разложением:

$$I=\int \frac{(1-\sin^2 x)^2}{\sin^2 x}\,dx=\int\left(\frac{1}{\sin^2 x}-2+\sin^2 x\right)dx=$$

$$=-\operatorname{ctg} x-2x+\frac{1}{2}\int(1-\cos 2x)\,dx=$$

$$=-\left(\operatorname{ctg} x+\frac{\sin 2x}{4}+\frac{3x}{2}\right)+C.$$

**5.6.6.** $I=\int \frac{dx}{\cos^4 x}.$

**5.6.7.** $I=\int \frac{dx}{\sqrt[3]{\sin^{11} x\cos x}}.$

Решение. Здесь оба показателя $-11/3$ и $-1/3$ — отрицательные числа и их сумма $-11/3-1/3=-4$ есть четное число, поэтому полагаем

$$\operatorname{tg} x=t;\qquad \frac{dx}{\cos^2 x}=dt.$$

$$I=\int\frac{dx}{\cos^4 x\sqrt[3]{\operatorname{tg}^{11} x}}=\int\frac{1+t^2}{\sqrt[3]{t^{11}}}\,dt=$$

$$=\int\left(t^{-11/3}+t^{-5/3}\right)dt=-\frac{3}{8}t^{-8/3}-\frac{3}{2}t^{-2/3}+C=$$

$$=-\frac{3(1+4\operatorname{tg}^2 x)}{8\operatorname{tg}^2 x\sqrt[3]{\operatorname{tg}^2 x}}+C.$$

**5.6.8.** Найти интегралы от $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$.

Решение.

$$\int \operatorname{tg} x\,dx=\int\frac{\sin x}{\cos x}\,dx=-\ln|\cos x|+C;$$

$$\int \operatorname{ctg} x\,dx=\int\frac{\cos x}{\sin x}\,dx=\ln|\sin x|+C.$$

**5.6.9.** $I=\int \operatorname{tg}^7 x\,dx.$

Решение. Полагаем

$$\operatorname{tg} x=t,\qquad x=\operatorname{arctg} t;\qquad dx=\frac{dt}{1+t^2}.$$

Получаем

$$I=\int t^7\frac{dt}{1+t^2}=\int\left(t^5-t^3+t-\frac{t}{1+t^2}\right)dt=$$
$$=\frac{t^6}{6}-\frac{t^4}{4}+\frac{t^2}{2}-\frac{1}{2}\ln(1+t^2)+C=$$
$$=\frac{1}{6}\operatorname{tg}^6 x-\frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x+\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x+\ln|\cos x|+C.$$

**5.6.10.** а) $I=\int \operatorname{ctg}^6 x\,dx$; б) $I=\int \operatorname{tg}^3 x\,dx$.

**5.6.11.** $I=\int\frac{\cos^4 x}{\sin^3 x}dx$.

**Решение.** Здесь $\sin x$ — в нечетной степени. Положим

$$\cos x=t,\qquad -\sin x\,dx=dt.$$

Получим интеграл от рациональной функции.

$$I=\int\frac{\cos^4 x\sin x}{\sin^4 x}dx=-\int\frac{t^4}{(1-t^2)^2}dt.$$

Здесь проще интегрировать по частям, чем применять общие методы интегрирования рациональных функций (ср. **4.4.1, б)**).

Положим

$$u=t^3;\qquad dv=\frac{tdt}{(1-t^2)^2}.$$

Тогда

$$du=3t^2dt;\qquad v=\frac{1}{2(1-t^2)}.$$

Отсюда

$$I=-\frac{t^3}{2(1-t^2)}+\frac{3}{2}\int\frac{t^2dt}{1-t^2}=$$
$$=-\frac{t^3}{2(1-t^2)}+\frac{3}{2}\int\frac{t^2-1+1}{1-t^2}dt=$$
$$=-\frac{t^3}{2(1-t^2)}-\frac{3}{2}t+\frac{3}{4}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+C=$$
$$=-\frac{\cos^3 x}{2\sin^2 x}-\frac{3}{2}\cos x+\frac{3}{4}\ln\left|\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\right|+C.$$

**5.6.12.** $I=\int\frac{\sin^4 x}{\cos x}dx$.

II. Интегралы вида $\int R(\sin x,\ \cos x)\,dx$, где $R$ — рациональная функция от $\sin x$ и $\cos x$, преобразуются в интегралы от рациональной функции подстановкой

$$\operatorname{tg}(x/2)=t\qquad(-\pi<x<\pi).$$

Эта подстановка называется *универсальной*. При этой подстановке

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2};\qquad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2};$$
$$x=2\operatorname{arctg} t;\qquad dx=\frac{2dt}{1+t^2}.$$

Иногда вместо подстановки $\operatorname{tg}(x/2)=t$ выгоднее сделать подстановку $\operatorname{ctg}(x/2)=t$ $(0<x<2\pi)$.

Универсальная подстановка часто ведет к слишком громоздким выкладкам.

Ниже указаны случаи, когда цель может быть достигнута с помощью более простых подстановок:

а) если выполняется равенство

$$R(-\sin x,\ \cos x)\equiv -R(\sin x,\ \cos x)$$

или

$$R(\sin x,\ -\cos x)\equiv -R(\sin x,\ \cos x),$$

то выгоднее применять подстановку $\cos x=t$ в первом случае и $\sin x=t$ — во втором;

б) если выполняется равенство

$$R(-\sin x,\ -\cos x)\equiv R(\sin x,\ \cos x),$$

то выгоднее применять подстановку $\operatorname{tg} x=t$ или $\operatorname{ctg} x=t$.

Последний случай встречается, в частности, в интегралах $\int R(\operatorname{tg} x)\,dx$.

**5.6.13.** $I=\int \frac{dx}{\sin x(2+\cos x-2\sin x)}$.

Решение. Положим $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$; тогда будем иметь

$$I=\int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}\left(2+\frac{1-t^2}{1+t^2}-\frac{4t}{1+t^2}\right)}=\int \frac{(1+t^2)\,dt}{t\,(t^2-4t+3)}.$$

Разлагаем на простейшие дроби

$$\frac{1+t^2}{t\,(t-3)(t-1)}=\frac{A}{t}+\frac{B}{t-3}+\frac{D}{t-1}.$$

Находим коэффициенты

$$A=1/3;\quad B=5/3;\quad D=-1.$$

Следовательно,

$$I=\frac{1}{3}\int\frac{dt}{t}+\frac{5}{3}\int\frac{dt}{t-3}-\int\frac{dt}{t-1}=$$
$$=\frac{1}{3}\ln|t|+\frac{5}{3}\ln|t-3|-\ln|t-1|+C=$$
$$=\frac{1}{3}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+\frac{5}{3}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}-3\right|-\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1\right|+C.$$

**5.6.14.** $I=\int \frac{dx}{5+\sin x+3\cos x}$.

**5.6.15.** $I=\int \frac{dx}{\sin x(2\cos^2 x-1)}$.

Решение. Если в выражение $\frac{1}{\sin x(2\cos^2 x-1)}$ подставить $-\sin x$ вместо $\sin x$, то дробь переменит знак на противоположный.

Значит, выгодно применить подстановку $t=\cos x$; $dt=-\sin x\,dx$, что дает

$$I=-\int\frac{dt}{(1-t^2)(2t^2-1)}.$$

Так как

$$\frac{1}{(1-t^2)(1-2t^2)}=\frac{(2-2t^2)-(1-2t^2)}{(1-t^2)(1-2t^2)}=\frac{2}{1-2t^2}-\frac{1}{1-t^2},$$

то

$$I=2\int\frac{dt}{1-2t^2}-\int\frac{dt}{1-t^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1+t\sqrt{2}}{1-t\sqrt{2}}\right|-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+C=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1+\sqrt{2}\cos x}{1-\sqrt{2}\cos x}\right|+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right|+C=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1+\sqrt{2}\cos x}{1-\sqrt{2}\cos x}\right|+\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C.$$

**5.6.16.** $I=\int\frac{\sin^2 x\cos x}{\sin x+\cos x}\,dx.$

Р е ш е н и е. Так как при изменении знаков у $\sin x$ и $\cos x$ подынтегральное выражение не меняет знака, выгодна подстановка

$$t=\operatorname{tg}x;\qquad dt=\frac{dx}{\cos^2 x}.$$

Следовательно,

$$I=\int\frac{\operatorname{tg}^2 x\cdot\cos^4 x}{(\operatorname{tg}x+1)}\,\frac{dx}{\cos^2 x}=\int\frac{t^2dt}{(t+1)(t^2+1)^2}.$$

Разлагаем на простейшие дроби

$$\frac{t^2}{(t+1)(t^2+1)^2}=\frac{A}{t+1}+\frac{Bt+D}{t^2+1}+\frac{Et+F}{(t^2+1)^2}.$$

Находим коэффициенты

$$A=1/4;\quad B=-1/4;\quad D=1/4;\quad E=1/2;\quad F=-1/2.$$

Следовательно,

$$I=\frac{1}{4}\int\frac{dt}{t+1}-\frac{1}{4}\int\frac{t-1}{t^2+1}\,dt+\frac{1}{2}\int\frac{t-1}{(t^2+1)^2}\,dt;$$

$$I=\frac{1}{4}\ln\frac{1+t}{\sqrt{1+t^2}}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1+t}{1+t^2}+C=$$

$$=\frac{1}{4}\ln|\sin x+\cos x|-\frac{1}{4}\cos x(\sin x+\cos x)+C.$$

**5.6.17.** $I=\int\frac{2\operatorname{tg}x+3}{\sin^2 x+2\cos^2 x}\,dx.$

Решение. Разделив числитель и знаменатель на $\cos^2 x$ и заменив $\operatorname{tg} x = t$; $dx/\cos^2 x = dt$, получим

$$I = \int \frac{2\operatorname{tg} x + 3}{\sin^2 x + 2\cos^2 x}\,dx = \int \frac{(2\operatorname{tg} x + 3)\dfrac{dx}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg}^2 x + 2} =$$
$$= \int \frac{2t+3}{t^2+2}\,dt = \ln(t^2+2) + \frac{3}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}} + C =$$
$$= \ln(\operatorname{tg}^2 x + 2) + \frac{3}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} + C.$$

**5.6.18.** $I = \int \frac{\sin x}{1 + \sin x}\,dx.$

Решение. Этот интеграл можно, конечно, вычислить с помощью универсальной подстановки $\operatorname{tg}(x/2) = t$, но проще сделать это, прибегая к следующему преобразованию подынтегральной функции:

$$\frac{\sin x}{1+\sin x} = \frac{\sin x\,(1-\sin x)}{(1+\sin x)(1-\sin x)} = \frac{\sin x\,(1-\sin x)}{\cos^2 x} =$$
$$= \frac{\sin x}{\cos^2 x} - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} - \operatorname{tg}^2 x.$$

Отсюда

$$I = \int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\,dx - \int \sec^2 x\,dx + \int dx =$$
$$= \frac{1}{\cos x} - \operatorname{tg} x + x + C.$$

**5.6.19.** $I = \int \frac{1}{\cos^4 x \sin^2 x}\,dx.$

Решение. Здесь можно подставить $\operatorname{tg} x = t$, но проще преобразовать подынтегральную функцию. Вводя в числитель тригонометрическую единицу во второй степени, получим

$$I = \int \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)^2}{\cos^4 x \sin^2 x}\,dx =$$
$$= \int \frac{\sin^4 x + 2\sin^2 x\cos^2 x + \cos^4 x}{\cos^4 x \sin^2 x}\,dx =$$
$$= \int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}\,dx + 2\int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} =$$
$$= \int \operatorname{tg}^2 x \frac{dx}{\cos^2 x} + 2\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x = \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + 2\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C.$$

III. Интегрирование гиперболических функций. Функции, рационально зависящие от гиперболических функций, интегрируются так же, как и в случае тригонометрических функций.

Следует иметь в виду следующие основные формулы:

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1; \quad \operatorname{sh}^2 x = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2x - 1);$$
$$\operatorname{ch}^2 x = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2x + 1); \quad \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x = \frac{1}{2}\operatorname{sh} 2x.$$

Если $\operatorname{th}\frac{x}{2}=t$, то $\operatorname{sh} x=\frac{2t}{1-t^2}$; $\operatorname{ch} x=\frac{1+t^2}{1-t^2}$;

$$x=2\operatorname{Arth} t=\ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right)\qquad(-1<t<1);\qquad dx=\frac{2dt}{1-t^2}.$$

**5.6.20.** $I=\int \operatorname{ch}^2 x\,dx.$

Решение.

$$I=\int\frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2x+1)\,dx=\frac{1}{4}\operatorname{sh} 2x+\frac{1}{2}x+C.$$

**5.6.21.** $I=\int \operatorname{ch}^3 x\,dx.$

Решение. Так как $\operatorname{ch} x$ входит в нечетной степени, то полагаем $\operatorname{sh} x=t$; $\operatorname{ch} x\,dx=dt$. Получаем

$$I=\int\operatorname{ch}^2 x\operatorname{ch} x\,dx=\int(1+t^2)\,dt=t+\frac{t^3}{3}+C=\operatorname{sh} x+\frac{1}{3}\operatorname{sh}^3 x+C.$$

**5.6.22.** Вычислить интегралы:

а) $\int\operatorname{sh}^2 x\operatorname{ch}^2 x\,dx$; б) $\int\frac{dx}{\operatorname{sh} x+2\operatorname{ch} x}$.

## § 5.7. Интегрирование некоторых иррациональных функций с помощью тригонометрических или гиперболических подстановок

Интегрирование функций, рационально зависящих от $x$ и $\sqrt{ax^2+bx+c}$, можно свести к нахождению интегралов одного из следующих типов:

I. $\int R(t,\sqrt{p^2t^2+q^2})\,dt$;

II. $\int R(t,\sqrt{p^2t^2-q^2})\,dt$;

III. $\int R(t,\sqrt{q^2-p^2t^2})\,dt$,

где $t=x+b/(2a)$; $ax^2+bx+c=\pm p^2t^2\pm q^2$ (выделение полного квадрата).

Интегралы вида I—III могут быть сведены к интегралам от выражений, рациональных относительно синуса и косинуса (обычных или гиперболических), с помощью следующих подстановок:

I. $t=\frac{q}{p}\operatorname{tg} z$ или $t=\frac{q}{p}\operatorname{sh} z$.

II. $t=\frac{q}{p}\sec z$ или $t=\frac{q}{p}\operatorname{ch} z$.

III. $t=\frac{q}{p}\sin z$ или $t=\frac{q}{p}\operatorname{th} z$.

**5.7.1.** $I=\int\frac{dx}{\sqrt{(5+2x+x^2)^3}}$.