Если $\operatorname{th}\frac{x}{2}=t$, то $\operatorname{sh} x=\frac{2t}{1-t^2}$; $\operatorname{ch} x=\frac{1+t^2}{1-t^2}$;

$$x=2\operatorname{Arth} t=\ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right) \qquad (-1<t<1); \qquad dx=\frac{2dt}{1-t^2}.$$

5.6.20. $I=\int \operatorname{ch}^2 x\, dx$.

Решение.

$$I=\int \frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2x+1)\, dx=\frac{1}{4}\operatorname{sh} 2x+\frac{1}{2}x+C.$$

5.6.21. $I=\int \operatorname{ch}^3 x\, dx$.

Решение. Так как $\operatorname{ch} x$ входит в нечетной степени, то полагаем $\operatorname{sh} x=t$; $\operatorname{ch} x\, dx=dt$. Получаем

$$I=\int \operatorname{ch}^2 x \operatorname{ch} x\, dx=\int (1+t^2)\, dt=t+\frac{t^3}{3}+C=\operatorname{sh} x+\frac{1}{3}\operatorname{sh}^3 x+C.$$

5.6.22. Вычислить интегралы:

а) $\int \operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^2 x\, dx$; б) $\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x+2\operatorname{ch} x}$.

§ 5.7. Интегрирование некоторых иррациональных функций с помощью тригонометрических или гиперболических подстановок

Интегрирование функций, рационально зависящих от x и $\sqrt{ax^2+bx+c}$, можно свести к нахождению интегралов одного из следующих типов:

I. $\int R(t, \sqrt{p^2t^2+q^2})\, dt$;

II. $\int R(t, \sqrt{p^2t^2-q^2})\, dt$;

III. $\int R(t, \sqrt{q^2-p^2t^2})\, dt$,

где $t=x+b/(2a)$; $ax^2+bx+c=\pm p^2t^2 \pm q^2$ (выделение полного квадрата).

Интегралы вида I—III могут быть сведены к интегралам от выражений, рациональных относительно синуса и косинуса (обычных или гиперболических), с помощью следующих подстановок:

I. $t=\frac{q}{p}\operatorname{tg} z$ или $t=\frac{q}{p}\operatorname{sh} z$.

II. $t=\frac{q}{p}\sec z$ или $t=\frac{q}{p}\operatorname{ch} z$.

III. $t=\frac{q}{p}\sin z$ или $t=\frac{q}{p}\operatorname{th} z$.

5.7.1. $I=\int \frac{dx}{\sqrt{(5+2x+x^2)^3}}$.

Решение. $5+2x+x^2=4+(x+1)^2$. Положим $x+1=t$. Тогда

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{(5+2x+x^2)^3}}=\int\frac{dt}{\sqrt{(4+t^2)^3}}.$$

Мы получили интеграл типа I. Сделаем подстановку

$$t=2\operatorname{tg}z;\quad dt=\frac{2dz}{\cos^2 z};\quad \sqrt{4+t^2}=2\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 z}=\frac{2}{\cos z}.$$

Мы получим

$$I=\frac{1}{4}\int\cos z\,dz=$$

$$=\frac{1}{4}\sin z+C=\frac{1}{4}\frac{\operatorname{tg}z}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 z}}+C=\frac{1}{4}\frac{t/2}{\sqrt{1+t^2/4}}+C=$$

$$=\frac{x+1}{4\sqrt{5+2x+x^2}}+C.$$

5.7.2. $I=\int\frac{dx}{(x+1)^2\sqrt{x^2+2x+2}}$.

Решение. $x^2+2x+2=(x+1)^2+1$.
Положим $x+1=t$; тогда

$$I=\int\frac{dt}{t^2\sqrt{t^2+1}}.$$

Мы опять получили интеграл типа I. Применим подстановку $t=\operatorname{sh}z$. Тогда

$$dt=\operatorname{ch}z\,dz;\quad \sqrt{t^2+1}=\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 z}=\operatorname{ch}z.$$

Следовательно,

$$I=\int\frac{\operatorname{ch}z\,dz}{\operatorname{sh}^2 z\operatorname{ch}z}=\int\frac{dz}{\operatorname{sh}^2 z}=-\operatorname{cth}z+C=$$

$$=-\frac{\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 z}}{\operatorname{sh}z}+C=-\frac{\sqrt{1+t^2}}{t}+C=-\frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x+1}+C.$$

5.7.3. $I=\int x^2\sqrt{x^2-1}\,dx$.

5.7.4. $I=\int\frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}\,dx$.

5.7.5. $I=\int\sqrt{(x^2-1)^3}\,dx$.

Решение. Применим подстановку:

$$x=\operatorname{ch}t;\ dx=\operatorname{sh}t\,dt.$$

Следовательно,

$$I=\int\sqrt{(\operatorname{ch}^2 t-1)^3}\operatorname{sh} t\,dt=\int \operatorname{sh}^4 t\,dt=\int\left(\frac{\operatorname{ch}2t-1}{2}\right)^2 dt=$$
$$=\frac{1}{4}\int \operatorname{ch}^2 2t\,dt-\frac{1}{2}\int \operatorname{ch}2t\,dt+\frac{1}{4}\int dt=$$
$$=\frac{1}{8}\int(\operatorname{ch}4t+1)\,dt-\frac{1}{4}\operatorname{sh}2t+\frac{1}{4}t=$$
$$=\frac{1}{32}\operatorname{sh}4t-\frac{1}{4}\operatorname{sh}2t+\frac{3}{8}t+C.$$

Возвратимся к переменной x:

$$t=\operatorname{Arch}x=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right);$$
$$\operatorname{sh}2t=2\operatorname{sh}t\operatorname{ch}t=2x\sqrt{x^2-1};$$
$$\operatorname{sh}4t=2\operatorname{sh}2t\operatorname{ch}2t=4x\sqrt{x^2-1}\,(2x^2-1).$$

Следовательно,

$$I=\frac{1}{8}x(2x^2-1)\sqrt{x^2-1}-\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1}+\frac{3}{8}\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)+C.$$

5.7.6. $I=\int\frac{dx}{(1+\sqrt{x})\sqrt{x-x^2}}$.

Решение. Применяем подстановку:

$$x=\sin^2 t;\qquad dx=2\sin t\cos t\,dt$$

и получаем

$$I=\int\frac{2\sin t\cos t\,dt}{(1+\sin t)\sqrt{\sin^2 t-\sin^4 t}}=\int\frac{2\,dt}{1+\sin t}=2\int\frac{1-\sin t}{\cos^2 t}\,dt=$$
$$=2\operatorname{tg}t-\frac{2}{\cos t}+C=\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}-\frac{2}{\sqrt{1-x}}+C=\frac{2(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{1-x}}+C.$$

5.7.7. $I=\int\sqrt{3-2x-x^2}\,dx$.

5.7.8. $I=\int\frac{dx}{(x^2-2x+5)^{3/2}}$.

§ 5.8. Интегрирование других трансцендентных функций

5.8.1. $I=\int\frac{\ln x}{x^2}\,dx$.

Решение. Будем интегрировать по частям, полагая

$$u=\ln x;\qquad dv=\frac{dx}{x^2};$$
$$du=\frac{dx}{x};\qquad v=-\frac{1}{x};$$
$$I=-\frac{\ln x}{x}+\int\frac{dx}{x^2}=-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}+C.$$