Следовательно,

$$I=\int\sqrt{(\operatorname{ch}^2 t-1)^3}\operatorname{sh} t\,dt=\int\operatorname{sh}^4 t\,dt=\int\left(\frac{\operatorname{ch}2t-1}{2}\right)^2 dt=$$
$$=\frac{1}{4}\int\operatorname{ch}^2 2t\,dt-\frac{1}{2}\int\operatorname{ch}2t\,dt+\frac{1}{4}\int dt=$$
$$=\frac{1}{8}\int(\operatorname{ch}4t+1)\,dt-\frac{1}{4}\operatorname{sh}2t+\frac{1}{4}t=$$
$$=\frac{1}{32}\operatorname{sh}4t-\frac{1}{4}\operatorname{sh}2t+\frac{3}{8}t+C.$$

Возвратимся к переменной x:

$$t=\operatorname{Arch}x=\ln(x+\sqrt{x^2-1});$$
$$\operatorname{sh}2t=2\operatorname{sh}t\operatorname{ch}t=2x\sqrt{x^2-1};$$
$$\operatorname{sh}4t=2\operatorname{sh}2t\operatorname{ch}2t=4x\sqrt{x^2-1}\,(2x^2-1).$$

Следовательно,

$$I=\frac{1}{8}x(2x^2-1)\sqrt{x^2-1}-\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1}+\frac{3}{8}\ln(x+\sqrt{x^2-1})+C.$$

5.7.6. $I=\int\frac{dx}{(1+\sqrt{x})\sqrt{x-x^2}}$.

Решение. Применяем подстановку:

$$x=\sin^2 t;\qquad dx=2\sin t\cos t\,dt$$

и получаем

$$I=\int\frac{2\sin t\cos t\,dt}{(1+\sin t)\sqrt{\sin^2 t-\sin^4 t}}=\int\frac{2\,dt}{1+\sin t}=2\int\frac{1-\sin t}{\cos^2 t}\,dt=$$
$$=2\operatorname{tg}t-\frac{2}{\cos t}+C=\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}-\frac{2}{\sqrt{1-x}}+C=\frac{2(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{1-x}}+C.$$

5.7.7. $I=\int\sqrt{3-2x-x^2}\,dx$.

5.7.8. $I=\int\frac{dx}{(x^2-2x+5)^{3/2}}$.

§ 5.8. Интегрирование других трансцендентных функций

5.8.1. $I=\int\frac{\ln x}{x^2}\,dx$.

Решение. Будем интегрировать по частям, полагая

$$u=\ln x;\qquad dv=\frac{dx}{x^2};$$
$$du=\frac{dx}{x};\qquad v=-\frac{1}{x};$$
$$I=-\frac{\ln x}{x}+\int\frac{dx}{x^2}=-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}+C.$$

5.8.2. $I=\int \frac{\ln x\,dx}{\sqrt{1-x}}$.

5.8.3. $I=\int \frac{e^x\,dx}{(1+e^{2x})^2}$.

Решение. Положим: $e^x=t$; $e^x\,dx=dt$. Получим

$$I=\int \frac{dt}{(1+t^2)^2}.$$

Пользуемся рекуррентной формулой (см. **4.4.1**):

$$I=I_2=\frac{t}{2(t^2+1)}+\frac{1}{2}\int \frac{dt}{1+t^2};$$

$$I=\frac{t}{2(t^2+1)}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg} t+C=\frac{e^x}{2(1+e^{2x})}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg} e^x+C.$$

5.8.4. $I=\int e^{-x}\ln(e^x+1)\,dx$.

Решение. Интегрируем по частям:

$$u=\ln(e^x+1);\quad dv=e^{-x}\,dx;$$

$$du=\frac{e^x}{1+e^x}\,dx;\qquad v=-e^{-x};$$

$$I=-e^{-x}\ln(1+e^x)+\int\frac{dx}{1+e^x}=$$

$$=-e^{-x}\ln(1+e^x)+\int\frac{e^x+1-e^x}{1+e^x}\,dx=$$

$$=-e^{-x}\ln(1+e^x)+x-\ln(1+e^x)+C.$$

5.8.5. $I=\int \frac{e^{\alpha \operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{3/2}}\,dx$.

5.8.6. $I=\int \frac{x\operatorname{arctg} x\,dx}{\sqrt{1+x^2}}$.

Решение. Интегрируя по частям, получим

$$u=\operatorname{arctg} x;\quad dv=\frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}};$$

$$du=\frac{dx}{1+x^2};\qquad v=\sqrt{1+x^2};$$

$$I=\sqrt{1+x^2}\operatorname{arctg} x-\int\sqrt{1+x^2}\,\frac{dx}{1+x^2}=$$

$$=\sqrt{1+x^2}\operatorname{arctg} x-\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+C.$$