§ 5.9. Обзор методов интегрирования (основных видов интегралов)

№ п/п	Вид интеграла	Метод интегрирования
1	$\int F[\varphi(x)]\varphi'(x)\,dx$	Подстановка $\varphi(x)=t$
2	$\int f(x)\varphi'(x)\,dx$	Интегрирование по частям $$\int f(x)\varphi'(x)\,dx = f(x)\varphi(x)-\int \varphi(x)f'(x)\,dx.$$ Метод интегрирования по частям применяется, например, к интегралам вида $\int p(x)f(x)\,dx$, где $p(x)$ — многочлен, а $f(x)$ одна из следующих функций: $$e^{\alpha x};\ \cos\alpha x;\ \sin\alpha x;\ \ln x;\ \operatorname{arctg} x;\ \arcsin x \text{ и т. п.,}$$ а также к интегралам от произведений показательной функции на косинус или синус.
3	$\int f(x)\varphi^{(n)}(x)\,dx$	Сводится к интегрированию произведения $f^{(n)}(x)\varphi(x)$ с помощью формулы кратного интегрирования по частям: $$\int f(x)\varphi^{(n)}(x)\,dx = f(x)\varphi^{(n-1)}(x)-f'(x)\varphi^{(n-2)}(x)+f''(x)\varphi^{(n-3)}(x)-\ldots+(-1)^{n-1}f^{(n-1)}(x)\varphi(x)+(-1)^n\int f^{(n)}(x)\varphi(x)\,dx$$
4	$\int e^{\alpha x}p_n(x)\,dx$, где $p_n(x)$ — многочлен степени n.	Применяя формулу кратного интегрирования по частям (см. п. 3), получим $$\int e^{\alpha x}p_n(x)\,dx = e^{\alpha x}\left[\frac{p_n(x)}{\alpha}-\frac{p_n'(x)}{\alpha^2}+\frac{p_n''(x)}{\alpha^3}-\ldots+(-1)^n\frac{p_n^{(n)}(x)}{\alpha^{n+1}}\right]+C$$
5	$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,dx$, $p^2-4q<0$	Подстановка $$x+\frac{p}{2}=t$$

№ п/п	Вид интеграла	Метод интегрирования
6	$I_n=\int \frac{dx}{(x^2+1)^n}$	Применение рекуррентной формулы $$I_n=\frac{x}{(2n-2)(x^2+1)^{n-1}}+\frac{2n-3}{2n-2}I_{n-1}$$
7	$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$, где $\frac{P(x)}{Q(x)}$ — правильная рациональная дробь, $Q(x)=(x-x_1)^l(x-x_2)^m\ldots$ $\ldots(x^2+px+q)^k\ldots$	Подынтегральную дробь представляют в виде суммы простейших дробей $$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{(x-x_1)}+\frac{A_2}{(x-x_1)^2}+\ldots+\frac{A_l}{(x-x_1)^l}+\frac{B_1}{(x-x_2)}+\frac{B_2}{(x-x_2)^2}+\ldots\ldots+\frac{B_m}{(x-x_2)^m}+\ldots+\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2}+\ldots+\frac{M_kx+N_k}{(x^2+px+q)^k}+\ldots$$
8	$\int R(x, x^{m/n}, \ldots, x^{r/s})\,dx$, где R — рациональная функция своих аргументов.	Приводится к интегралу от рациональной дроби подстановкой $x=t^k$, где k — общий знаменатель дробей $$\frac{m}{n}, \ldots, \frac{r}{s}$$
9	$\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{1/n}\right]dx$, где R — рациональная функция своих аргументов.	Сводится к интегралу от рациональной дроби подстановкой $$\frac{ax+b}{cx+d}=t^n$$
10	$\int \frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$	Подстановкой $x+\frac{b}{2a}=t$ интеграл приводится к сумме двух интегралов: $$\int\frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx=M_1\int\frac{tdt}{\sqrt{at^2+m}}+N_1\int\frac{dt}{\sqrt{at^2+m}}.$$ Первый интеграл сводится к интегралу от степенной функции, а второй интеграл — табличный.

№ п/п	Вид интеграла	Метод интегрирования
11	$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$, где R — рациональная функция от x и $\sqrt{ax^2+bx+c}$	Приводится к интегралу от рациональной дроби подстановками Эйлера: $\sqrt{ax^2+bx+c}=t \pm x\sqrt{a} \qquad (a>0)$, $\sqrt{ax^2+bx+c}=tx \pm \sqrt{c} \qquad (c>0)$, $\sqrt{ax^2+bx+c}=t(x-x_1) \qquad (4ac-b^2<0)$, где x_1 — корень трехчлена ax^2+bx+c. Для вычисления указанного интеграла применяются также тригонометрические подстановки: $x+\frac{b}{2a}=\begin{cases} \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\sin t \\ \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\cos t \end{cases} \qquad (a<0,\ 4ac-b^2<0)$ $x+\frac{b}{2a}=\begin{cases} \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\sec t \\ \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\operatorname{cosec} t \end{cases} \qquad (a>0,\ 4ac-b^2<0)$ $x+\frac{b}{2a}=\begin{cases} \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}\operatorname{tg} t \\ \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}\operatorname{ctg} t \end{cases} \qquad (a>0,\ 4ac-b^2>0)$
12	$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$, где $P_n(x)$ — многочлен степени n.	Записываем равенство $\int \frac{P_n(x)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + k\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, где $Q_{n-1}(x)$ — многочлен степени $n-1$. Дифференцируя обе части этого равенства и умножая на $\sqrt{ax^2+bx+c}$, получим тождество $P_n(x) \equiv Q'_{n-1}(x)(ax^2+bx+c) + \frac{1}{2}Q_{n-1}(x)(2ax+b)+k$, которое дает систему $n+1$ линейных уравнений для определения коэффициентов многочлена $Q_{n-1}(x)$ и множителя k. Интеграл же $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ берется методом, указанным в п. 10 ($M=0$; $N=1$).

№ п/п	Вид интеграла	Метод интегрирования
13	$\int \frac{dx}{(x-x_1)^m \sqrt{ax^2+bx+c}}$	Этот интеграл приводится подстановкой $x-x_1=1/t$ к интегралу, рассмотренному выше.
14	$\int x^m (a+bx^n)^p\, dx,$ где m, n, p — рациональные числа (интеграл от биномиального дифференциала).	Интеграл от биномиального дифференциала выражается через элементарные функции только при выполнении одного из следующих условий: 1) если p — целое число, 2) если $\frac{m+1}{n}$ — целое число, 3) если $\frac{m+1}{n}+p$ — целое число. 1-й случай а) если p — целое положительное число, то нужно раскрыть скобки $(a+bx^n)^p$ по биному Ньютона и вычислить интегралы от степеней; б) если p — целое отрицательное число, то подстановка $x=t^k$, где k — общий знаменатель дробей m и n, приводит к интегралу от рациональной дроби; 2-й случай если $\frac{m+1}{n}$ — целое число, то применяется подстановка $a+bx^n=t^k$, где k — знаменатель дроби p; 3-й случай если $\frac{m+1}{n}+p$ — целое число, то применяется подстановка $a+bx^n=x^n t^k$, где k — знаменатель дроби p.
15	$\int R(\sin x,\ \cos x)\, dx$	Универсальная подстановка $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$. Если $R(-\sin x, \cos x)=-R(\sin x, \cos x)$, то подстановка $\cos x=t$. Если $R(\sin x,\ -\cos x)=-R(\sin x,\ \cos x)$, то подстановка $\sin x=t$. Если $R(-\sin x, -\cos x)=R(\sin x,\ \cos x)$, то подстановка $\operatorname{tg} x=t$.

№ п/п	Вид интеграла	Метод интегрирования
16	$\int R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)\,dx$	Применяется подстановка $\operatorname{th}\frac{x}{2}=t$. При этом $\operatorname{sh} x=\frac{2t}{1-t^2}$; $\operatorname{ch} x=\frac{1+t^2}{1-t^2}$; $dx=\frac{2dt}{1-t^2}$.
17	$\int \sin ax \sin bx\,dx$ $\int \sin ax \cos bx\,dx$ $\int \cos ax \cos bx\,dx$	Необходимо преобразовать произведение тригонометрических функций в сумму или разность, пользуясь одной из следующих формул: $\sin ax \sin bx = \frac{1}{2}[\cos(a-b)x-\cos(a+b)x]$ $\cos ax \cos bx = \frac{1}{2}[\cos(a-b)x+\cos(a+b)x]$ $\sin ax \cos bx = \frac{1}{2}[\sin(a-b)x+\sin(a+b)x]$
18	$\int \sin^m x \cos^n x\,dx$, где m и n — целые числа	Если m — нечетное положительное, то подстановка $\cos x=t$. Если n — нечетное положительное, то подстановка $\sin x=t$. Если $m+n$ — четное отрицательное, то подстановка $\operatorname{tg} x=t$. Если m и n — четные неотрицательные, то применяют формулы: $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$; $\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$
19	$\int \sin^p x \cos^q x\,dx$ $(0 < x < \pi/2)$, p и q — рациональные числа.	Подстановкой $\sin x=t$ приводится к интегралу от биномиального дифференциала $\int \sin^p x \cos^q x\,dx=\int t^p(1-t^2)^{q-1}dt$ (см. п. 14).
20	$\int R(e^{ax})\,dx$	Подстановкой $e^{ax}=t$ преобразуется в интеграл от рациональной функции