Глава VI

Определенный интеграл

§ 6.1. Понятие определенного интеграла

Пусть на отрезке $[a, b]$ определена функция $f(x)$. *Интегральной суммой* называется

$$I_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,\Delta x_i,$$

где $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$,

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i;\ \xi_i \in [x_i,\ x_{i+1}] \qquad (i = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1).$$

Верхней (нижней) суммой называется

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i \qquad \left(s_n = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i\right),$$

где $M_i = \sup f(x)$ $[m_i = \inf f(x)]$ для $x \in [x_i,\ x_{i+1}]$.

Определенным интегралом от функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ называется предел интегральных сумм:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,\Delta x_i \quad \text{при} \quad \max|\Delta x_i| \to 0.$$

Если этот предел существует, функция называется *интегрируемой* на отрезке $[a, b]$. Всякая непрерывная функция интегрируема.

6.1.1. Для интеграла

$$\int_0^{\pi} \sin x\,dx$$

найти верхние и нижние интегральные суммы, соответствующие разбиению отрезка $[0, \pi]$ на 3 и на 6 равных частей.

Решение. Разобьем отрезок $[0, \pi]$ на 3 равные части точками

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \pi/3, \quad x_2 = 2\pi/3, \quad x_3 = \pi.$$

На отрезке $[0, \pi/3]$ функция $\sin x$ монотонно возрастает и поэтому для этого отрезка имеем $m_0 = \sin 0 = 0$, $M_0 = \sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2$. На отрезке $[\pi/3,\ 2\pi/3]$ наименьшим значением функции является $m_1 = \sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2$, а наибольшим $M_1 = \sin(\pi/2) = 1$. На отрезке

$[2\pi/3,\ \pi]$ функция $\sin x$ монотонно убывает и потому

$$m_2 = \sin \pi = 0, \quad M_2 = \sin (2\pi/3) = \sqrt{3}/2.$$

Так как все Δx_k равны $\pi/3$, то

$$s_3 = \sum_{k=0}^{2} m_k \Delta x_k = \frac{\pi}{3}\left(0 + \frac{\sqrt{3}}{2} + 0\right) = \frac{\pi\sqrt{3}}{6} \approx 0{,}907,$$

$$S_3 = \sum_{k=0}^{2} M_k \Delta x_k = \frac{\pi}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi(\sqrt{3}+1)}{3} \approx 2{,}86.$$

При разбиении отрезка $[0,\ \pi]$ на 6 равных частей точками $x_0 = 0$, $x_1 = \pi/6$, $x_2 = \pi/3$, $x_3 = \pi/2$, $x_4 = 2\pi/3$, $x_5 = 5\pi/6$, $x_6 = \pi$ таким же путем находим

$$\begin{aligned}
&m_0 = 0, && M_0 = \sin(\pi/6) = 1/2,\\
&m_1 = \sin(\pi/6) = 1/2, && M_1 = \sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2,\\
&m_2 = \sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2, && M_2 = \sin(\pi/2) = 1,\\
&m_3 = \sin(2\pi/3) = \sqrt{3}/2, && M_3 = \sin(\pi/2) = 1,\\
&m_4 = \sin(5\pi/6) = 1/2, && M_4 = \sin(2\pi/3) = \sqrt{3}/2,\\
&m_5 = \sin \pi = 0, && M_5 = \sin(5\pi/6) = 1/2.
\end{aligned}$$

Для этого разбиения получаем

$$s_6 = \frac{\pi}{6}(m_0 + m_1 + \ldots + m_5) = \frac{\pi}{6}(1 + \sqrt{3}) \approx 1{,}43,$$

$$S_6 = \frac{\pi}{6}(M_0 + M_1 + \ldots + M_5) = \frac{\pi}{6}(3 + \sqrt{3}) \approx 2{,}48.$$

Как и должно быть, выполняются неравенства

$$s_3 \leqslant s_6 \leqslant \int_0^{\pi} \sin x\, dx \leqslant S_6 \leqslant S_3$$

(точное значение интеграла равно 2).

6.1.2. При каком $\delta > 0$ из неравенства $\max \Delta x_i < \delta$ вытекает соотношение

$$\left| \int_0^{\pi} \sin x\, dx - \sum_{i=0}^{n-1} \sin \xi_k \Delta x_k \right| < 0{,}001.$$

Решение. Так как $s_n < I_n < S_n$, то для выполнения требуемого неравенства достаточно, чтобы верхняя и нижняя интегральные суммы отличались меньше, чем на 0,001:

$$0 < S_n - s_n < 0{,}001.$$

Но

$$S_n - s_n = \sum_{i=0}^{n-1} (M_i - m_i)\,\Delta x_i < \delta \sum_{i=0}^{n-1} (M_i - m_i),$$

где M_i и m_i — наибольшее и наименьшее значения функции $\sin x$ на отрезке $[x_i, \; x_{i+1}]$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$. Считая для простоты, что в качестве одной из точек разбиения выбрана точка $\pi/2$ и пользуясь монотонностью функции $\sin x$ на отрезках $[0, \pi/2]$ и $[\pi/2, \pi]$, получим

$$\sum_{i=0}^{n-1} (M_i - m_i) = 2\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right) = 2.$$

Следовательно, требуемое неравенство удовлетворяется, если $2\delta < 0{,}001$, т. е. $\delta < 0{,}0005$.

6.1.3. Показать, что функция Дирихле (см. **1.14.4.б**) **не** интегрируема в промежутке $[0, 1]$.

Решение. При фиксированном разбиении отрезка $[0, 1]$ мы должны учитывать, в частности, две возможности: 1) все точки ξ_i рациональны; 2) все точки ξ_i иррациональны. В первом случае интегральная сумма равна единице, во втором случае — нулю. Следовательно, как бы мы ни уменьшали максимальную длину частичных отрезков разбиения, мы всегда получим интегральные суммы, равные единице, и интегральные суммы, равные нулю. Поэтому не существует предела интегральных сумм, а это значит, что функция Дирихле не интегрируема в промежутке $[0, 1]$.

6.1.4. Вычислить путь, проходимый свободно падающим телом за промежуток времени от $t = a$ *сек* до $t = b$ *сек*.

Решение. Свободно падающее тело движется с постоянным ускорением g и начальной скоростью $v_0 = 0$. Следовательно, скорость движения в момент времени t равна приращению скорости за период времени от 0 до t, т. е. $v(t) = \Delta v$. За малый период времени Δt приращение скорости приближенно равняется ускорению в момент времени t, умноженному на Δt. Но в нашем случае ускорение постоянно. Поэтому $\Delta v = g\Delta t$ и, значит, $v(t) = gt$, так как $\Delta t = t - 0 = t$.

Разобьем промежуток времени от $t = a$ до $t = b$ на n равных частей; тогда длительность Δt каждого промежутка будет равна $\Delta t = (b-a)/n$. Будем считать, что в течение каждого промежутка времени тело движется равномерно со скоростью, равной его скорости в начале этого промежутка, т. е.

$$v_0 = ga,$$
$$v_1 = g\left(a + 1\,\frac{b-a}{n}\right),$$
$$v_2 = g\left(a + 2\,\frac{b-a}{n}\right),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$v_{n-1} = g\left[a + (n-1)\,\frac{b-a}{n}\right].$$

Отсюда находим путь, пройденный телом за i-й промежуток времени: $v_i(b-a)/n$. Весь путь s, пройденный телом, приближенно равен

$$s \approx s_n = \frac{b-a}{n}(v_0 + v_1 + \ldots + v_{n-1}) =$$
$$= \frac{b-a}{n} g\left[na + 1\,\frac{b-a}{n} + 2\,\frac{b-a}{n} + \ldots + (n-1)\frac{b-a}{n}\right] =$$
$$= (b-a)\,g\left[a + \frac{b-a}{n^2}\,\frac{n(n-1)}{2}\right].$$

При увеличении числа n величина пройденного пути будет вычисляться более точно. Точное значение пути s отыскивается как предел s_n при $n \to \infty$:

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} g(b-a)\left[a + \frac{1}{2}(b-a)\left(1-\frac{1}{n}\right)\right] =$$
$$= g(b-a)\left[a + \frac{1}{2}(b-a)\right] = \frac{g}{2}(b^2 - a^2).$$

Так как сумма s_n является интегральной суммой

$$s_n = \sum_{i=0}^{n-1} v_i \Delta t_i \qquad \left(\Delta t_i = \Delta t = \frac{b-a}{n}\right),$$

то путь s есть интеграл:

$$s = \int_a^b v\,dt = \int_a^b gt\,dt = \frac{g}{2}(b^2 - a^2).$$

6.1.5. Вычислить, исходя из определения, интеграл

$$\int_0^1 x\,dx.$$

Решение. По определению,

$$\int_0^1 x\,dx = \lim \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i \Delta x_i \quad \text{при} \quad \max \Delta x_i \to 0,$$

где

$$0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 1, \quad \xi_i \in [x_i,\ x_{i+1}], \quad \Delta x_i = x_{i+1} - x_i.$$

1. Разобьем отрезок $[0, 1]$ на n равных частей точками деления $x_i = i/n$ $(i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$.

Длина каждого частичного отрезка равна $\Delta x_i = 1/n$, причем $1/n \to 0$ при $n \to \infty$.

В качестве точек ξ_i возьмем правые концы частичных отрезков: $\xi_i = x_{i+1} = (i+1)/n$ $(i = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1)$.

Составим интегральную сумму

$$I_n = S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i+1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}(1+2+\ldots+n) = \frac{n(n+1)}{2n^2}.$$

Предел этой интегральной суммы при $n \to \infty$ равен

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Следовательно,

$$\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}.$$

2. Покажем на этом примере, что при другом выборе точек ξ_i предел интегральной суммы будет тот же.

Возьмем, например, в качестве ξ_i середины частичных отрезков $\xi_i = (i+1/2)/n$ $(i = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1)$.

Составим интегральную сумму

$$I_n = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{2i+1}{2n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{2n^2}[1+3+5+\ldots+(2n-1)] = \frac{2n^2}{4n^2} = \frac{1}{2}.$$

Отсюда

$$\lim_{n \to \infty} I_n = \frac{1}{2}.$$

6.1.6. Вычислить, исходя из определения, интеграл

$$\int_a^b x^m dx \quad (m \neq -1,\ 0 < a < b).$$

Решение. В этом примере оказывается удобным в качестве точек деления x_i выбрать точки

$$x_0 = a; \quad x_1 = a\left(\frac{b}{a}\right)^{1/n}, \quad \ldots, \quad x_i = a\left(\frac{b}{a}\right)^{i/n}, \quad \ldots, \quad x_n = a\left(\frac{b}{a}\right)^{n/n} = b,$$

которые образуют геометрическую прогрессию со знаменателем

$$q = \left(\frac{b}{a}\right)^{1/n} > 1.$$

Длина i-го частичного отрезка равна

$$\Delta x_i = aq^{i+1} - aq^i = aq^i(q-1).$$

Поэтому максимальная длина частичных отрезков равна $\max \Delta x_i = = aq^{n-1}(q-1) = a\left(\frac{b}{a}\right)^{(n-1)/n}\left[\left(\frac{b}{a}\right)^{1/n} - 1\right]$ и стремится к нулю с ростом n, так как $\lim\limits_{n \to \infty} q = 1$.

В качестве точек ξ_i выберем правые точки частичных отрезков: $\xi_i = x_{i+1} = aq^{i+1}$ ($i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$).

Составим интегральную сумму:

$$I_n = \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i^m \Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1} a^m q^{(i+1)m} aq^i (q-1) =$$

$$= a^{m+1}(q-1) q^m \left[1 + q^{m+1} + \ldots + q^{(n-1)(m+1)}\right] =$$

$$= a^{m+1}(q-1) q^m \frac{q^{(m+1)n} - 1}{q^{m+1} - 1} = (b^{m+1} - a^{m+1}) q^m \frac{q-1}{q^{m+1}-1}.$$

Вычислим предел интегральной суммы при $\max \Delta x_i \to 0$, т. е. при $q \to 1$:

$$\lim I_n = (b^{m+1} - a^{m+1}) \lim_{q \to 1} q^m \frac{q-1}{q^{m+1}-1} = (b^{m+1} - a^{m+1}) \frac{1}{m+1}.$$

Таким образом,

$$\int_a^b x^m \, dx = \frac{1}{m+1}(b^{m+1} - a^{m+1}).$$

6.1.7. Вычислить, исходя из определения, интеграл

$$\int_1^2 \frac{dx}{x}.$$

Решение. Разобьем отрезок $[1, 2]$ на n частей так, чтобы точки деления x_i ($i = 0, 1, 2, \ldots, n$) составляли геометрическую прогрессию:

$$x_0 = 1; \; x_1 = q; \; x_2 = q^2; \; x_3 = q^3; \; \ldots; \; x_n = q^n = 2,$$

откуда $q = \sqrt[n]{2}$.

Длина i-го частичного отрезка равна

$$\Delta x_i = q^{i+1} - q^i = q^i (q-1),$$

так что $\max \Delta x_i = q^{n-1}(q-1) \to 0$ при $n \to \infty$, т. е. при $q \to 1$. В качестве точек ξ_i выберем правые концы частичных отрезков, т. е. $\xi_i = x_{i+1} = q^{i+1}$.

Составим интегральную сумму:

$$I_n = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{\xi_i} \Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{q^{i+1}} q^i (q-1) = \frac{n}{q}(q-1) = \frac{1}{2^{1/n}} n (2^{1/n} - 1).$$

Остается найти предел интегральной суммы:

$$\lim_{n \to \infty} I_n = \lim_{n \to \infty} \frac{n(2^{1/n} - 1)}{2^{1/n}} = \ln 2,$$

так как $2^{1/n} - 1 \sim \frac{1}{n} \ln 2$ при $n \to \infty$.

Итак,

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln 2.$$

6.1.8. Найти величину интеграла

$$I = \int_0^5 \sqrt{25 - x^2}\, dx,$$

опираясь на его геометрический смысл.

Решение. Линия $y = \sqrt{25 - x^2}$ есть верхняя половина окружности $x^2 + y^2 = 25$. Та часть линии, которая получается при изменении x от 0 до 5, лежит в первой координатной четверти. Отсюда заключаем, что криволинейная трапеция, ограниченная линиями $x = 0$; $x = 5$; $y = 0$; $y = \sqrt{25 - x^2}$, есть четверть круга $x^2 + y^2 = 25$; ее площадь равна $25\pi/4$.

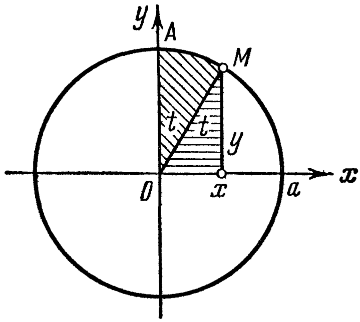

Рис. 59.

Следовательно,

$$I = \int_0^5 \sqrt{25 - x^2}\, dx = \frac{25\pi}{4}.$$

6.1.9. Исходя из геометрического смысла интеграла, вычислить интеграл

$$I = \int_1^5 (4x - 1)\, dx.$$

6.1.10. Доказать, что

$$I = \int_0^x \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} \qquad (0 < x \leqslant a).$$

Решение. Интеграл

$$I = \int_0^x \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$$

выражает площадь S_{OAMx} части круга радиуса a, лежащей в первом квадранте (рис. 59). Эта площадь равна сумме площадей треугольника OMx и сектора OAM.

Но площадь треугольника

$$S_{OMx} = \frac{xy}{2} = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Площадь сектора

$$S_{OAM} = \frac{1}{2} a^2 t,$$

где $\sin t = x/a$.

Следовательно,

$$S_{OAM} = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a},$$

а значит,

$$I=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}.$$

6.1.11. Исходя из геометрического значения интеграла, показать, что

а) $\int\limits_0^{2\pi}\sin^3 x\,dx=0$; б) $\int\limits_{-1}^{1}e^{-x^2}\,dx=2\int\limits_0^1 e^{-x^2}\,dx$.

Решение. а) График функции $y=\sin^3 x$ изображен на рис. 60. Покажем, что площадь, лежащая над осью Ox, равна площади, лежащей под осью Ox. В самом деле, пусть $\pi\leqslant x\leqslant 2\pi$, тогда $x=\pi+x_1$, где $0\leqslant x_1\leqslant\pi$ и

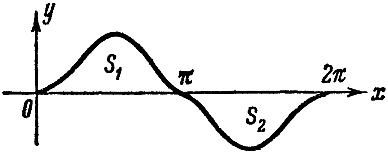

Рис. 60.

$$\sin^3 x=\sin^3(\pi+x_1)=-\sin^3 x_1.$$

Поэтому вторая половина графика получена из первой сдвигом вправо на π и симметрией относительно оси Ox. Следовательно,

$$\int\limits_0^{2\pi}\sin^3 x\,dx=0.$$

6.1.12. Дана функция $f(x)=x^3$ на промежутке $[-2, 3]$. Найти нижнюю (s_n) и верхнюю (S_n) интегральные суммы на заданном промежутке, деля его на n равных частей.

6.1.13. Исходя из геометрического значения определенного интеграла, доказать, что:

а) $\int\limits_0^{\pi}\sin 2x\,dx=0$; б) $\int\limits_0^{2\pi}\cos^3 x\,dx=0$;

в) $\int\limits_1^{2}(2x+1)\,dx=6$; г) $\int\limits_{-3}^{3}\sqrt{9-x^2}\,dx=\frac{9\pi}{2}$.

6.1.14. С помощью предельного перехода от интегральных сумм вычислить интеграл

$$I=\int\limits_1^4 x^3\,dx,$$

разбивая отрезок $[1, 4]$

а) на равные части,

б) точками, образующими геометрическую прогрессию,

причем в каждом из указанных разбиений в качестве ξ_i выбирать

1) левые концы отрезков,

2) правые концы отрезков,

3) середины отрезков $[x_i, x_{i+1}]$.