§ 6.2. Вычисление определенных интегралов по формуле Ньютона — Лейбница

Формулой Ньютона—Лейбница называется формула

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

где $F(x)$ — одна из первообразных для функции $f(x)$, т. е.

$$F'(x) \equiv f(x) \qquad (a \leqslant x \leqslant b).$$

6.2.1. Вычислить интеграл

$$I = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}.$$

Решение. Так как одной из первообразных для функции $f(x) = 1/(1+x^2)$ является функция $F(x) = \operatorname{arctg} x$, то, применяя формулу Ньютона — Лейбница, получим

$$I = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x\Big|_1^{\sqrt{3}} = \operatorname{arctg}\sqrt{3} - \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}.$$

6.2.2. Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_0^{\pi/2} \sin 2x\,dx$; б) $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin^3 x}\,dx$; в) $\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}$.

6.2.3. Дана функция

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ \sqrt{x} & \text{при} \quad 1 \leqslant x \leqslant 2. \end{cases}$$

Вычислить $\int\limits_0^2 f(x)\,dx$.

Решение. По свойству аддитивности интеграла

$$\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^2 f(x)\,dx =$$

$$= \int_0^1 x^2\,dx + \int_1^2 \sqrt{x}\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 + \frac{2}{3}x^{3/2}\Big|_1^2 =$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}(4\sqrt{2} - 1).$$

6.2.4. Вычислить интеграл

$$I=\int_0^2 |1-x|\,dx.$$

Решение. Так как

$$|1-x|=\begin{cases} 1-x & \text{при} \quad 0\leqslant x\leqslant 1, \\ x-1 & \text{при} \quad 1\leqslant x\leqslant 2, \end{cases}$$

то, применяя свойство аддитивности интеграла, получим

$$\int_0^2 |1-x|\,dx=\int_0^1 (1-x)\,dx+\int_1^2 (x-1)\,dx=$$

$$=-\left.\frac{(1-x)^2}{2}\right|_0^1+\left.\frac{(x-1)^2}{2}\right|_1^2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1.$$

6.2.5. Вычислить интеграл

$$I=\int_a^b \frac{|x|}{x}\,dx,$$

где $a<b$.

Решение. Если $0\leqslant a<b$, то $f(x)=|x|/x=1$, поэтому $\int_a^b f(x)\,dx=b-a$. Если $a<b\leqslant 0$, то $f(x)=-1$ и $\int_a^b f(x)\,dx=$ $=-b-(-a)=a-b$. Наконец, если $a<0<b$, то разбиваем интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ на два интеграла:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^0 f(x)\,dx+\int_0^b f(x)\,dx=b-(-a).$$

Все три случая можно объединить одной формулой:

$$\int_a^b \frac{|x|}{x}\,dx=|b|-|a|.$$

Замечание. Вычисляя интегралы с помощью формулы Ньютона—Лейбница, следует обратить внимание на условия законности ее применения. Эта формула применяется для вычисления определенного интеграла от *непрерывной* на отрезке $[a, b]$ функции $f(x)$ лишь тогда, когда равенство $F'(x)=f(x)$ выполняется *на всем отрезке* $[a, b]$ ($F(x)$ — первообразная функции $f(x)$). В частности, первообразная обязана быть непрерывной функцией на всем отрезке $[a, b]$. Использование в качестве первообразной разрывной функции может привести к неверному результату.

6.2.6. Найти ошибку при следующем вычислении интеграла.

$$\int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2x}{1-x^2} \Bigg|_0^{\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \left[\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) - \operatorname{arctg} 0\right] = -\frac{\pi}{6},$$

где $\left(\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2x}{1-x^2}\right)' = \frac{1}{1+x^2}$ $(x \neq 1)$.

Решение. Результат заведомо неверный: интеграл от всюду положительной функции оказался отрицательным. Ошибка произошла из-за того, что функция $\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2x}{1-x^2}$ в точке $x=1$ терпит разрыв первого рода:

$$\lim_{x \to 1-0} \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2x}{1-x^2} = \frac{\pi}{4}; \quad \lim_{x \to 1+0} \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2x}{1-x^2} = -\frac{\pi}{4}.$$

Правильное значение рассматриваемого интеграла равно

$$\int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x \Big|_0^{\sqrt{3}} = \operatorname{arctg} \sqrt{3} - \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{8}.$$

Здесь формула Ньютона—Лейбница применима, так как функция $F(x) = \operatorname{arctg} x$ непрерывна в $[0, \pi/3]$ и равенство $F'(x) = f(x)$ выполняется на всем этом отрезке.

6.2.7. Найти ошибку, допущенную при следующем вычислении интеграла:

$$\int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{1+2\sin^2 x} = \int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{\cos^2 x + 3\sin^2 x} = \int\limits_0^{\pi} \frac{(dx)/\cos^2 x}{1+3\operatorname{tg}^2 x} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}(\sqrt{3} \operatorname{tg} x) \Big|_0^{\pi} = 0.$$

(Интеграл от всюду положительной функции оказался равным нулю!)

Решение. Применение формулы Ньютона—Лейбница незаконно, так как первообразная $F(x) = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}(\sqrt{3} \operatorname{tg} x)$ терпит разрыв в точке $x = \pi/2$. Действительно,

$$\lim_{x \to \pi/2-0} F(x) = \lim_{x \to \pi/2-0} \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}(\sqrt{3} \operatorname{tg} x) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}(+\infty) = \frac{\pi}{2\sqrt{3}},$$

$$\lim_{x \to \pi/2+0} F(x) = \lim_{x \to \pi/2+0} \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}(\sqrt{3} \operatorname{tg} x) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}(-\infty) = -\frac{\pi}{2\sqrt{3}}.$$

Правильный результат можно получить так:

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{\cos^2 x+3\sin^2 x}=\int_0^{\pi} \frac{1}{\operatorname{ctg}^2 x+3}\,\frac{dx}{\sin^2 x}=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}\operatorname{ctg} x\right)\Big|_0^{\pi}=\frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

Но правильный результат можно найти также и при помощи функции $F(x)=\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}\operatorname{tg} x\right)$. Для этого следует отрезок интегрирования $[0, \pi]$ разбить на два отрезка, $[0, \pi/2]$ и $[\pi/2, \pi]$, и учесть указанные выше предельные значения функции $F(x)$ при $x \to \pi/2 \mp 0$. Тогда на каждом из отрезков первообразная становится непрерывной функцией и будет законно применение формулы Ньютона — Лейбница:

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{\cos^2 x+3\sin^2 x}=\int_0^{\pi/2}+\int_{\pi/2}^{\pi}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}\operatorname{tg} x\right)\Big|_0^{\pi/2}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}\operatorname{tg} x\right)\Big|_{\pi/2}^{\pi}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\left[\left(\frac{\pi}{2}-0\right)+\left(0-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)\right]=\frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

6.2.8. Вычислить интеграл

$$\int_0^{\pi} \sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}\,dx.$$

Решение. $\sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}=\sqrt{\frac{2\cos^2 x}{2}}=|\cos x|=$

$$=\begin{cases} \cos x, & 0\leqslant x\leqslant \pi/2, \\ -\cos x, & \pi/2\leqslant x\leqslant \pi. \end{cases}$$

Поэтому

$$\int_0^{\pi} \sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}\,dx=\int_0^{\pi/2}\cos x\,dx+\int_{\pi/2}^{\pi}(-\cos x)\,dx=$$

$$=\sin x\Big|_0^{\pi/2}+(-\sin x)\Big|_{\pi/2}^{\pi}=(1-0)+(0-(-1))=2.$$

Замечание. Если не обратить внимание на то, что $\cos x$ отрицателен в промежутке $[\pi/2, \pi]$ и положить

$$\sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}=\cos x,$$

то получим заведомо неверный результат:

$$\int_0^{\pi} \cos x \, dx = \sin x \Big|_0^{\pi} = 0.$$

6.2.9. Вычислить интеграл

$$I = \int_0^{100\pi} \sqrt{1 - \cos 2x} \, dx.$$

Решение. Имеем

$$\sqrt{1 - \cos 2x} = \sqrt{2} \, |\sin x|.$$

Так как $|\sin x|$ имеет период π, то

$$\int_0^{100\pi} \sqrt{1 - \cos 2x} \, dx = \sqrt{2} \int_0^{100\pi} |\sin x| \, dx =$$

$$= 100\sqrt{2} \int_0^{\pi} \sin x \, dx = 200\sqrt{2}.$$

6.2.10. Вычислить интегралы:

а) $I = \int\limits_{-2}^{-1} \frac{dx}{(11 + 5x)^3}$; б) $I = \int\limits_{-3}^{-2} \frac{dx}{x^2 - 1}$;

в) $I = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^2 \frac{x}{2} \, dx$; г) $I = \int\limits_{0}^{\pi/4} \frac{x^2}{x^2 + 1} \, dx$;

д) $I = \int\limits_{e}^{e^2} \frac{dx}{x \ln x}$; е) $I = \int\limits_{1/\pi}^{2/\pi} \frac{\sin(1/x)}{x^2} \, dx$;

ж) $I = \int\limits_{0}^{1} \frac{e^x}{1 + e^{2x}} \, dx$; з) $I = \int\limits_{0}^{1} \frac{x^3 \, dx}{1 + x^8}$;

и) $I = \int\limits_{0}^{3} \frac{x \, dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{5x+1}}$; к) $I = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{\cos x - \cos^3 x} \, dx$;

л) $I = \int\limits_{1}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{(1 + x^2)^{3/2}}$.

§ 6.3. Оценки интеграла. Определенный интеграл как функция своих пределов

1. Если $f(x) \leqslant \varphi(x)$ при $a \leqslant x \leqslant b$, то

$$\int_a^b f(x) \, dx \leqslant \int_a^b \varphi(x) \, dx.$$