то получим заведомо неверный результат:

$$\int_0^{\pi} \cos x\,dx = \sin x \Big|_0^{\pi} = 0.$$

6.2.9. Вычислить интеграл

$$I = \int_0^{100\pi} \sqrt{1-\cos 2x}\,dx.$$

Решение. Имеем

$$\sqrt{1-\cos 2x} = \sqrt{2}\,|\sin x|.$$

Так как $|\sin x|$ имеет период π, то

$$\int_0^{100\pi} \sqrt{1-\cos 2x}\,dx = \sqrt{2}\int_0^{100\pi} |\sin x|\,dx =$$

$$= 100\sqrt{2}\int_0^{\pi} \sin x\,dx = 200\sqrt{2}.$$

6.2.10. Вычислить интегралы:

а) $I = \int\limits_{-2}^{-1} \frac{dx}{(11+5x)^3}$; б) $I = \int\limits_{-3}^{-2} \frac{dx}{x^2-1}$;

в) $I = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^2 \frac{x}{2}\,dx$; г) $I = \int\limits_{0}^{\pi/4} \frac{x^2}{x^2+1}\,dx$;

д) $I = \int\limits_{e}^{e^2} \frac{dx}{x \ln x}$; е) $I = \int\limits_{1/\pi}^{2/\pi} \frac{\sin(1/x)}{x^2}\,dx$;

ж) $I = \int\limits_{0}^{1} \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$; з) $I = \int\limits_{0}^{1} \frac{x^3\,dx}{1+x^8}$;

и) $I = \int\limits_{0}^{3} \frac{x\,dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{5x+1}}$; к) $I = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{\cos x - \cos^3 x}\,dx$;

л) $I = \int\limits_{1}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}}$.

§ 6.3. Оценки интеграла. Определенный интеграл как функция своих пределов

1. Если $f(x) \leqslant \varphi(x)$ при $a \leqslant x \leqslant b$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

В частности,

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b \left|f(x)\right| dx.$$

2. $$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a),$$

где m — наименьшее значение, а M — наибольшее значение функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ *(оценка интеграла)*.

3. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a), \qquad a < \xi < b$$

(теорема о среднем значении).

4. Если функции $f(x)$, $\varphi(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$, а $\varphi(x)$, кроме того, сохраняет знак на этом отрезке, то

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b \varphi(x)\,dx, \qquad a < \xi < b$$

(обобщенная теорема о среднем).

5. $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$; $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_x^a f(t)\,dt = -f(x)$ в каждой точке x непрерывности функции $f(x)$.

6.3.1. Оценить интегралы:

а) $I = \displaystyle\int_1^3 \sqrt{3+x^3}\,dx$; б) $I = \displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\sin x}{x}\,dx$;

в) $I = \displaystyle\int_0^2 \frac{x^2+5}{x^2+2}\,dx$.

Решение. а) Так как функция $f(x) = \sqrt{3+x^2}$ монотонно возрастает на отрезке $[1, 3]$, то $m = 2$, $M = \sqrt{30}$, $b-a = 2$.

Следовательно, оценка интеграла имеет вид

$$2\cdot 2 \leqslant \int_1^3 \sqrt{3+x^3}\,dx \leqslant \sqrt{30}\cdot 2,$$

т. е.

$$4 \leqslant \int_1^3 \sqrt{3+x^3}\,dx \leqslant 2\sqrt{30} \approx 10{,}95.$$

б) Подынтегральная функция $f(x)=(\sin x)/x$ убывает на отрезке $[\pi/4, \pi/3]$, так как ее производная

$$f'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}=\frac{(x-\operatorname{tg} x)\cos x}{x^2}<0.$$

Следовательно, наименьшее значение функции —

$$m=f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2\pi},$$

а наибольшее значение функции —

$$M=f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}.$$

Поэтому

$$\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)\leqslant\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3}\frac{\sin x}{x}\,dx\leqslant\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right),$$

т. е.

$$0{,}22\approx\frac{\sqrt{3}}{8}\leqslant\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3}\frac{\sin x}{x}\,dx\leqslant\frac{\sqrt{2}}{6}\approx 0{,}24.$$

6.3.2. Оценить абсолютную величину интеграла

$$\int\limits_{10}^{19}\frac{\sin x}{1+x^8}\,dx.$$

Решение. Так как $|\sin x|\leqslant 1$, то при $x\geqslant 10$ выполняется неравенство

$$\left|\frac{\sin x}{1+x^8}\right|<10^{-8}.$$

Поэтому

$$\left|\int\limits_{10}^{19}\frac{\sin x}{1+x^8}\,dx\right|<(19-10)\,10^{-8}<10^{-7}$$

(истинное значение интеграла $\approx -10^{-8}$).

6.3.3. Установить, какой из двух интегралов

$$\int\limits_0^1\sqrt{x}\,dx,\quad\int\limits_0^1 x^3\,dx$$

больше?

Решение. Известно, что $\sqrt{x}>x^3$ при $0<x<1$. Поэтому

$$\int\limits_0^1\sqrt{x}\,dx>\int\limits_0^1 x^3\,dx.$$

6.3.4. Доказать неравенства:

а) $0 < \int\limits_0^1 \frac{x^7\,dx}{\sqrt[3]{1+x^8}} < \frac{1}{8}$; б) $1 < \int\limits_0^1 e^{x^2}\,dx < e$.

Решение. а) Так как $0 < \frac{x^7}{\sqrt[3]{1+x^8}} < x^7$ при $0 < x \leqslant 1$, то

$$0 < \int\limits_0^1 \frac{x^7\,dx}{\sqrt[3]{1+x^8}} < \int\limits_0^1 x^7\,dx = \left.\frac{x^8}{8}\right|_0^1 = \frac{1}{8}.$$

б) Так как при $0 < x < 1$ имеет место неравенство $1 < e^{x^2} < e$, то

$$\int\limits_0^1 dx < \int\limits_0^1 e^{x^2}\,dx < \int\limits_0^1 e\,dx.$$

Отсюда вытекает справедливость доказываемого неравенства.

6.3.5. Доказать неравенство

$$\int\limits_0^{\pi/2} e^{-R\sin x}\,dx < \frac{\pi}{2R}(1-e^{-R}) \qquad (R > 0).$$

Решение. Так как функция $f(x) = (\sin x)/x$ в интервале $(0, \pi/2)$ убывает (см. **6.3.1.** б)), то при $0 < x < \pi/2$

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} > f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi}.$$

Следовательно, в этом интервале $\sin x > \frac{2}{\pi}x$, поэтому

$$e^{-R\sin x} < e^{-\frac{2R}{\pi}x}$$

и

$$\int\limits_0^{\pi/2} e^{-R\sin x}dx < \int\limits_0^{\pi/2} e^{-\frac{2R}{\pi}x}\,dx = -\frac{\pi}{2R}\left[e^{-\frac{2R}{\pi}x}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2R}(1-e^{-R}).$$

6.3.6. Доказать, что для любых интегрируемых на интервале (a, b) функций $f(x)$ и $g(x)$ имеет место неравенство Шварца—Буняковского:

$$\left|\int\limits_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right| \leqslant \sqrt{\int\limits_a^b f^2(x)\,dx \int\limits_a^b g^2(x)\,dx}.$$

Решение. Рассмотрим функцию

$$F(x) = [f(x) - \lambda g(x)]^2,$$

где λ — любое действительное число. Так как $F(x) \geqslant 0$, то

$$\int_a^b [f(x) - \lambda g(x)]^2 \, dx \geqslant 0,$$

или

$$\lambda^2 \int_a^b g^2(x) \, dx - 2\lambda \int_a^b f(x) g(x) \, dx + \int_a^b f^2(x) \, dx \geqslant 0.$$

Выражение, стоящее в левой части последнего неравенства, является квадратным трехчленом относительно λ. Из неравенства следует, что при любом λ этот трехчлен неотрицателен. Следовательно, его дискриминант неположителен, т. е.

$$\left\{ \int_a^b f(x) g(x) \, dx \right\}^2 - \int_a^b f^2(x) \, dx \int_a^b g^2(x) \, dx \leqslant 0.$$

Отсюда

$$\left| \int_a^b f(x) g(x) \, dx \right| \leqslant \sqrt{\int_a^b f^2(x) \, dx \int_a^b g^2(x) \, dx},$$

что и требовалось доказать.

6.3.7. Оценить сверху интеграл

$$I = \int_0^1 \frac{\sin x}{1+x^2} \, dx.$$

Решение. По обобщенной теореме о среднем значении определенного интеграла имеем

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{1+x^2} \, dx = \sin \xi \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \sin \xi \operatorname{arctg} x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} \sin \xi \; (0 < \xi < 1).$$

Так как на отрезке $[0, 1]$ функция $\sin x$ возрастает, то $\sin \xi < \sin 1$. Отсюда получаем оценку интеграла сверху:

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{1+x^2} \, dx < \frac{\pi}{4} \sin 1 \approx 0{,}64.$$

Можно получить лучшую оценку, если ту же теорему применить в виде

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{1+x^2} \, dx = \frac{1}{1+\xi^2} \int_0^1 \sin x \, dx = \frac{1}{1+\xi^2} (1 - \cos 1) < 1 - \cos 1 \approx 0{,}46.$$

6.3.8. Доказать, исходя из геометрических соображений, что:

а) если функция $f(x)$ в промежутке $[a, b]$ возрастает и имеет вогнутый график, то

$$(b-a)f(a) < \int_a^b f(x)\,dx < (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2};$$

б) если функция $f(x)$ в промежутке $[a, b]$ возрастает и имеет выпуклый график, то

$$(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} < \int_a^b f(x)\,dx < (b-a)f(b).$$

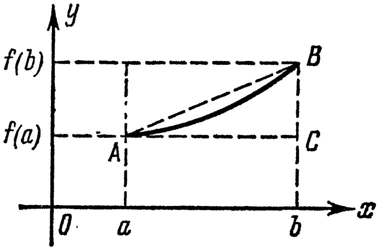

Рис. 61.

Решение. а) Без ограничения общности можно считать $f(x) > 0$. Вогнутость графика функции, в частности, означает, что график расположен ниже хорды, соединяющей точку $A(a, f(a))$ с точкой $B(b, f(b))$ (рис. 61). Поэтому площадь трапеции $aABb$ больше площади криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком функции, т. е.

$$\int_a^b f(x)\,dx < S_{aABb} = (b-a)\cdot\frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

Неравенство

$$(b-a)f(a) < \int_a^b f(x)\,dx$$

очевидно.

6.3.9. Оценить интеграл $\int_0^1 \sqrt{1+x^4}\,dx$, пользуясь

а) теоремой о среднем значении определенного интеграла,

б) результатом предыдущей задачи,

в) неравенством $\sqrt{1+x^4} < 1 + x^4/2$,

г) неравенством Шварца — Буняковского (см. **6.3.6**).

Решение. а) По теореме о среднем значении

$$I = \int_0^1 \sqrt{1+x^4}\,dx = \sqrt{1+\xi^4}, \quad \text{где } 0 \leqslant \xi \leqslant 1.$$

Но

$$1 < \sqrt{1+\xi^4} < \sqrt{2},$$

откуда

$$1 < I < \sqrt{2} \approx 1{,}414.$$

б) Функция $f(x)=\sqrt{1+x^4}$ вогнута на отрезке $[0, 1]$, так как

$$f''(x)=\frac{2x^2(x^4+3)}{(1+x^4)^{3/2}}>0, \qquad 0\leqslant x\leqslant 1.$$

На основании предыдущей задачи получаем

$$1<\int_0^1 \sqrt{1+x^4}\,dx<\frac{1+\sqrt{2}}{2}\approx 1{,}207.$$

в) $1<I=\int\limits_0^1 \sqrt{1+x^4}\,dx<\int\limits_0^1\left(1+\frac{x^4}{2}\right)dx=1+\frac{1}{10}=1{,}1.$

г) Положим $f(x)=\sqrt{1+x^4}$, $g(x)=1$ и используем неравенство Шварца—Буняковского

$$\left|\int_0^1 \sqrt{1+x^4}\,dx\right|=\int_0^1\sqrt{1+x^4}\,dx=I<\sqrt{\int_0^1(1+x^4)\,dx\cdot\int_0^1 1^2\,dx}=$$

$$=\sqrt{1{,}2}\approx 1{,}095.$$

6.3.10. Найти производную по x от функций:

а) $F(x)=\int\limits_{x^2}^{x^3}\ln t\,dt \qquad (x>0)$,

б) $F(x)=\int\limits_{1/x}^{\sqrt{x}}\cos(t^2)\,dt \qquad (x>0)$.

Решение. а) Запишем заданный интеграл следующим образом:

$$F(x)=\int_{x^2}^{c}\ln t\,dt+\int_c^{x^3}\ln t\,dt=\int_c^{x^3}\ln t\,dt-\int_c^{x^2}\ln t\,dt,$$

где c — произвольная постоянная, $c>0$.

Найдем теперь производную $F'(x)$, пользуясь правилом дифференцирования сложной функции и теоремой о производной интеграла по верхнему пределу:

$$F'_x(x)=\left[\int_c^{x^3}\ln t\,dt\right]'_{x^3}(x^3)'_x-\left[\int_c^{x^2}\ln t\,dt\right]'_{x^2}(x^2)'_x=$$

$$=\ln x^3\,3x^2-\ln x^2\,2x=(9x^2-4x)\ln x.$$

б) $F(x)=\int\limits_{1/x}^{c}\cos(t^2)\,dt+\int\limits_{c}^{\sqrt{x}}\cos(t^2)\,dt=$

$$=-\int\limits_{c}^{1/x}\cos(t^2)\,dt+\int\limits_{c}^{\sqrt{x}}\cos(t^2)\,dt;$$

$$F'(x)=-\left[\int\limits_{c}^{1/x}\cos(t^2)\,dt\right]'_{1/x}\left(\frac{1}{x}\right)'_x+\left[\int\limits_{c}^{\sqrt{x}}\cos(t^2)\,dt\right]'_{\sqrt{x}}(\sqrt{x})'_x=$$

$$=-\cos\frac{1}{x^2}\left(-\frac{1}{x^2}\right)+\cos x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x^2}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\cos x.$$

6.3.11. Найти производную по x от следующих функций:

а) $F(x)=\int\limits_{0}^{2x}\frac{\sin t}{t}\,dt;$ б) $F(x)=\int\limits_{x}^{0}\sqrt{1+t^4}\,dt.$

6.3.12. Найти точки экстремума функции $F(x)=\int\limits_{0}^{x}\frac{\sin t}{t}\,dt$ в области $x>0$.

Решение. Найдем производную

$$F'(x)=\left[\int\limits_{0}^{x}\frac{\sin t}{t}\,dt\right]'_x=\frac{\sin x}{x}.$$

Критическими точками являются точки

$$x=n\pi \quad (n=1,\ 2,\ \ldots), \quad \text{где} \quad \sin x=0.$$

Найдем вторую производную в этих точках:

$$F''(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2};$$

$$F''(n\pi)=\frac{1}{n\pi}\cos(n\pi)=\frac{1}{n\pi}(-1)^n\neq 0.$$

Так как в точках $x=n\pi$ $(n=1,\ 2,\ \ldots)$ вторая производная отлична от нуля, то эти точки являются точками экстремума функции, а именно: максимумами, если n — нечетное, и минимумами, если n — четное.

6.3.13. Найти производную от y по x функции, заданной параметрически:

$$x=\int\limits_{1}^{t^3}\sqrt[3]{z}\ln z\,dz;\quad y=\int\limits_{\sqrt{t}}^{3}z^2\ln z\,dz.$$

Решение. Известно, что $y'_x=\dfrac{y'_t}{x'_t}$.

Найдем x'_t и y'_t:

$$x'_t=\left(\int\limits_1^{t^3}\sqrt[3]{z}\ln z\,dz\right)'_{t^3}(t^3)'_t=t\ln t^3\cdot 3t^2=9t^3\ln t;$$

$$y'_t=\left(\int\limits_{\sqrt{t}}^{3}z^2\ln z\,dz\right)'_{\sqrt{t}}(\sqrt{t})'_t=-t\ln\sqrt{t}\,\frac{1}{2\sqrt{t}}=-\frac{1}{4}\sqrt{t}\ln t;$$

тсюда

$$y'_x=\frac{9t^3\ln t}{-\frac{1}{4}\sqrt{t}\ln t}=-36t^2\sqrt{t}\qquad(t>0).$$

6.3.14. Найти пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int\limits_0^{x^2}\sin\sqrt{x}\,dx}{x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int\limits_0^{x}(\operatorname{arctg}x)^2\,dx}{\sqrt{x^2+1}}$;

в) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\int\limits_0^{x}e^{x^2}\,dx\right)^2}{\int\limits_0^{x}e^{2x^2}\,dx}$.

Решение. а) При $x=0$ интеграл $\int\limits_0^{x^2}\sin\sqrt{x}\,dx$ равен нулю; легко роверить выполнение остальных условий, обеспечивающих законость применения правила Лопиталя. Поэтому

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int\limits_0^{x^2}\sin\sqrt{x}\,dx}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\left[\int\limits_0^{x^2}\sin\sqrt{x}\,dx\right]'_{x^2}(x^2)'_x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin x}{3x^2}=\frac{2}{3}.$$

в) Имеем неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Применим правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\int\limits_0^{x}e^{x^2}\,dx\right)^2}{\int\limits_0^{x}e^{2x^2}\,dx}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\int\limits_0^{x}e^{x^2}\,dx\cdot e^{x^2}}{e^{2x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\int\limits_0^{x}e^{x^2}\,dx}{e^{x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}2\frac{e^{x^2}}{e^{x^2}\cdot 2x}=0.$$

6.3.15. Найти производную $\frac{dy}{dx}$ функций, заданных неявно:

а) $\int\limits_0^y e^{-t^2}\,dt+\int\limits_0^{x^2}\sin^2 t\,dt=0$;

б) $\int\limits_0^y e^t\,dt+\int\limits_0^x \sin t\,dt=0$;

в) $\int\limits_{\pi/2}^x \sqrt{3-2\sin^2 z}\,dz+\int\limits_0^y \cos t\,dt=0$.

Решение. а) Продифференцируем левую часть уравнения по x, считая $y=y(x)$:

$$\left[\int\limits_0^y e^{-t^2}\,dt\right]_y'\cdot\frac{dy}{dx}+\left[\int\limits_0^{x^2}\sin^2 t\,dt\right]_{x^2}'(x^2)_x'=0;\quad e^{-y^2}\frac{dy}{dx}+\sin^2 x^2\cdot 2x=0.$$

Отсюда, решая уравнение относительно $\frac{dy}{dx}$, получим

$$\frac{dy}{dx}=-2xe^{+y^2}\sin^2 x^2.$$

в) Продифференцируем левую часть уравнения по x, считая $y=y(x)$:

$$\left[\int\limits_{\pi/2}^x \sqrt{3-2\sin^2 z}\,dz\right]_x'+\left[\int\limits_0^y \cos t\,dt\right]_y'\frac{dy}{dx}=0.$$

Отсюда

$$\sqrt{3-2\sin^2 x}+\cos y\,\frac{dy}{dx}=0;\quad \frac{dy}{dx}=-\frac{\sqrt{3-2\sin^2 x}}{\cos y}.$$

6.3.16. Найти: а) точки экстремума и точки перегиба графика функции

$$I=\int\limits_0^x (t-1)(t-2)^2\,dt;$$

б) кривизну линии, заданной параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x=a\sqrt{\pi}\int\limits_0^t \cos\frac{\pi t^2}{2}\,dt,\\ y=a\sqrt{\pi}\int\limits_0^t \sin\frac{\pi t^2}{2}\,dt \end{cases}$$

(спираль Корню).

Решение. а) Функция определена и непрерывно дифференцируема на всей числовой оси. Ее производная

$$I_x'=(x-1)(x-2)^2$$

равна нулю в точках $x_1=1$, $x_2=2$, причем при переходе через точку x_1 она меняет знак с — на +, а в окрестности точки x_2 знака не меняет. Следовательно, в точке $x_1=1$ минимум, а в точке $x_2=2$ экстремума нет.

Вторая производная

$$I''_x=3x^2-10x+8$$

обращается в нуль в точках $x_1=4/3$, $x_2=2$ и меняет знак при переходе через эти точки. Значит, эти точки являются абсциссами точек перегиба.

б) Имеем

$$x'_t=a\sqrt{\pi}\cos\frac{\pi t^2}{2}, \quad y'_t=a\sqrt{\pi}\sin\frac{\pi t^2}{2},$$

следовательно,

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\operatorname{tg}\frac{\pi t^2}{2}, \quad y''_{xx}=\frac{(y'_x)'_t}{x'_t}=\frac{\sqrt{\pi}\,t}{a\cos^3\frac{\pi t^2}{2}};$$

отсюда кривизна

$$K=\frac{|y''|}{[1+(y')^2]^{3/2}}=\frac{\sqrt{\pi}\,t}{a}.$$

6.3.17. Доказать, что функция $L(x)$, определенная в промежутке $(0, \infty)$ интегралом

$$L(x)=\int\limits_1^x\frac{dt}{t},$$

является обратной для функции e^x.

Решение. Возьмем производную

$$L'(x)=1/x \qquad (x>0).$$

Так как производная положительна, то функция $y=L(x)$ возрастает и, значит, имеет обратную функцию

$$x=L^{-1}(y).$$

Производная этой обратной функции равна

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{L'(x)}=x,$$

откуда следует (см. **3.1.10**), что

$$x=Ce^y.$$

Чтобы найти C, подставим $x=1$. Так как

$$L(1)=0, \quad \text{т. е.} \quad y|_{x=1}=0,$$

то

$$1=Ce^0=C,$$

что и доказывает наше утверждение:

$$x = L^{-1}(y) = e^{y}.$$

6.3.18. По графику функции $y = f(x)$, данному на рис. 62, выяснить вид графика первообразной $I = \int\limits_0^x f(t)\,dt$.

Решение. На отрезке $[0,\ a]$ заданная функция положительна, следовательно, первообразная возрастает. На отрезке $[0,\ a/2]$ производная заданной функции положительна, следовательно, кривая $I = I(x)$ вогнута. На отрезке $[a/2,\ a]$ производная заданной функции отрицательна и, следовательно, кривая $I = I(x)$ выпукла. Точка $x = a/2$ есть точка перегиба. Аналогично рассматривается отрезок $[a,\ 2a]$. Точка $x_1 = 0$ есть точка минимума, так как знак производной $I'(x) = f(x)$ меняется с — на $+$; точка $x_2 = a$ есть точка максимума, так как знак производной меняется с $+$ на —.

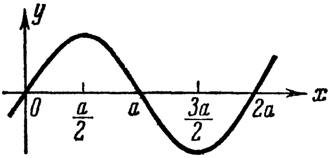

Рис. 62.

Первообразная $I(x)$ есть функция периодическая с периодом $2a$, так как площади, лежащие над осью Ox и под осью Ox, взаимно погашаются на отрезках длины $2a$. Учитывая все сказанное, можно качественно нарисовать график первообразной (рис. 63).

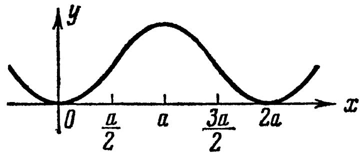

Рис. 63.

6.3.19. Найти многочлен $P(x)$ наименьшей степени, имеющий максимум, равный 6, при $x = 1$, и минимум, равный 2, при $x = 3$.

Решение. Многочлен есть всюду дифференцируемая функция. Поэтому точки экстремума могут быть только корнями производной. Кроме того, производная многочлена есть многочлен. Многочлен наименьшей степени с корнями $x_1 = 1$ и $x_2 = 3$ имеет вид $a(x-1)(x-3)$. Следовательно,

$$P'(x) = a(x-1)(x-3) = a(x^2 - 4x + 3).$$

Так как в точке $x = 1$ должно быть $P(1) = 6$, то

$$P(x) = \int\limits_1^x P'(x)\,dx + 6 = a\int\limits_1^x (x^2 - 4x + 3)\,dx + 6 =$$

$$= a\left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x - 1\frac{1}{3}\right) + 6.$$

Коэффициент a определяем из условия $P(3) = 2$, откуда $a = 3$. Следовательно,

$$P(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2.$$

6.3.20. Найти многочлен $P(x)$ наименьшей степени, график которого имеет три точки перегиба: $(-1, -1)$, $(1, 1)$ и точку с абсциссой 0, в которой кривая наклонена к оси абсцисс под углом $60°$.

Решение. Поскольку искомая функция есть многочлен, то абсциссы точек перегиба могут быть только среди корней второй производной. Многочлен наименьшей степени с корнями -1, 0, 1 имеет вид $ax(x^2-1)$. Следовательно,

$$P''(x) = a(x^3-x).$$

Так как в точке $x=0$ производная $P'(0)=\operatorname{tg} 60° = \sqrt{3}$, то

$$P'(x) = \int_0^x P''(x)\,dx + \sqrt{3} = a\left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right) + \sqrt{3}.$$

Далее, так как $P(1)=1$, то

$$P(x) = \int_1^x P'(x)\,dx + 1 = a\left(\frac{x^5}{20} - \frac{x^3}{6} + \frac{7}{60}\right) + \sqrt{3}(x-1)+1.$$

Коэффициент a определяем из последнего оставшегося условия $P(-1)=-1$, откуда $a = \dfrac{60(\sqrt{3}-1)}{7}$. Следовательно,

$$P(x) = \frac{\sqrt{3}-1}{7}(3x^5-10x^3) + x\sqrt{3}.$$

6.3.21. Пользуясь теоремой о среднем значении определенного интеграла, доказать, что

а) $3 < \displaystyle\int_0^1 \sqrt{q+x^2}\,dx < 10$,

б) $\dfrac{\pi}{2} < \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sqrt{1+\frac{1}{2}\sin^2 x}\,dx < \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}$,

в) $\dfrac{2\pi}{13} < \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{10+3\cos x} < \frac{2\pi}{7}$.

6.3.22. Пользуясь неравенством Шварца — Буняковского, доказать, что $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+x^3}\,dx < \sqrt{5}/2$. Убедиться, что применение теоремы о среднем дает более грубую оценку.

6.3.23. Найти производные следующих функций:

а) $F(x)=\int\limits_{1}^{x}\ln t\,dt\ (x>0)$; б) $F(x)=\int\limits_{2/x}^{x^2}\frac{dt}{t}$.

6.3.24. Найти производную $\frac{dy}{dx}$ от функций, заданных параметрически:

а) $x=\int\limits_{2}^{t}\frac{\ln z}{z}\,dz,\quad y=\int\limits_{5}^{\ln t}e^z\,dz$;

б) $x=\int\limits_{c^2}^{\sin t}\arcsin z\,dz,\quad y=\int\limits_{n}^{\sqrt{t}}\frac{\sin z^2}{z}\,dz$.

6.3.25. Найти точки экстремума функций:

а) $F(x)=\int\limits_{1}^{x}e^{-t^2/2}(1-t^2)\,dt$;

б) $F(x)=\int\limits_{0}^{x^2}\frac{t^2-5t+4}{2+e^t}\,dt$.

§ 6.4. Замена переменной в определенном интеграле

Если функция $x=\varphi(t)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $\varphi(t)$ — непрерывная однозначная функция, заданная на отрезке $[\alpha, \beta]$ и имеющая в нем непрерывную производную $\varphi'(t)$;

2) значения функции $x=\varphi(t)$ при изменении t на отрезке $[\alpha, \beta]$ не выходят за пределы отрезка $[a, b]$;

3) $\varphi(\alpha)=a$ и $\varphi(\beta)=b$,

то для любой непрерывной на отрезке $[a, b]$ функции $f(x)$ справедлива формула *замены переменной (или подстановки) в определенном интеграле*

$$\int\limits_{a}^{b}f(x)\,dx=\int\limits_{\alpha}^{\beta}f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt.$$

Часто вместо подстановки $x=\varphi(t)$ применяют обратную подстановку $t=\psi(x)$. В этом случае пределы α и β определяются непосредственно из равенств $\alpha=\psi(a)$ и $\beta=\psi(b)$. На практике замену переменной обычно производят с помощью монотонных непрерывно дифференцируемых функций. При этом замену пределов интегрирования удобно записывать в виде таблицы

x	t
a	α
b	β

6.4.1. Вычислить интеграл $\int\limits_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\sqrt{4-x^2}\,dx$.