6.3.23. Найти производные следующих функций:

а) $F(x)=\int\limits_1^x \ln t\,dt\;(x>0)$; б) $F(x)=\int\limits_{2/x}^{x^2}\frac{dt}{t}$.

6.3.24. Найти производную $\frac{dy}{dx}$ от функций, заданных параметрически:

а) $x=\int\limits_2^t \frac{\ln z}{z}\,dz,\quad y=\int\limits_5^{\ln t} e^z\,dz$;

б) $x=\int\limits_{c^2}^{\sin t}\arcsin z\,dz,\quad y=\int\limits_{\pi}^{\sqrt{t}}\frac{\sin z^2}{z}\,dz$.

6.3.25. Найти точки экстремума функций:

а) $F(x)=\int\limits_1^x e^{-t^2/2}(1-t^2)\,dt$;

б) $F(x)=\int\limits_0^{x^2}\frac{t^2-5t+4}{2+e^t}\,dt$.

§ 6.4. Замена переменной в определенном интеграле

Если функция $x=\varphi(t)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $\varphi(t)$ — непрерывная однозначная функция, заданная на отрезке $[\alpha, \beta]$ и имеющая в нем непрерывную производную $\varphi'(t)$;

2) значения функции $x=\varphi(t)$ при изменении t на отрезке $[\alpha, \beta]$ не выходят за пределы отрезка $[a, b]$;

3) $\varphi(\alpha)=a$ и $\varphi(\beta)=b$,

то для любой непрерывной на отрезке $[a, b]$ функции $f(x)$ справедлива формула *замены переменной (или подстановки) в определенном интеграле*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=\int\limits_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt.$$

Часто вместо подстановки $x=\varphi(t)$ применяют обратную подстановку $t=\psi(x)$. В этом случае пределы α и β определяются непосредственно из равенств $\alpha=\psi(a)$ и $\beta=\psi(b)$. На практике замену переменной обычно производят с помощью монотонных непрерывно дифференцируемых функций. При этом замену пределов интегрирования удобно записывать в виде таблицы

x	t
a	α
b	β

6.4.1. Вычислить интеграл $\int\limits_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\sqrt{4-x^2}\,dx$.

Решение. Применим подстановку $x=2\sin t$, считая, что $-\pi/3 \leqslant t \leqslant \pi/3$. Функция $x=\varphi(t)=2\sin t$ на отрезке $[-\pi/3, \pi/3]$ удовлетворяет всем условиям теоремы о замене переменной в определенном интеграле, так как она непрерывно дифференцируема, монотонна и

$$\varphi\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}, \qquad \varphi\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}.$$

Итак,

$$x=2\sin t; \quad dx=2\cos t\,dt; \quad \sqrt{4-x^2}=2\,|\cos t|=2\cos t,$$

так как $\cos t>0$ в промежутке $[-\pi/3, \pi/3]$.

Таким образом,

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{4-x^2}\,dx=4\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \cos^2 t\,dt=2\int_{-\pi/3}^{\pi/3}(1+\cos 2t)\,dt=$$

$$=2\left[t+\frac{1}{2}\sin 2t\right]_{-\pi/3}^{\pi/3}=\frac{4\pi}{3}+\sqrt{3}.$$

6.4.2. Вычислить интеграл $\displaystyle\int_2^4 \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^4}\,dx$.

Решение. Применим подстановку

$$x=2\sec t; \qquad dx=2\frac{\sin t}{\cos^2 t}\,dt; \qquad \left|\begin{array}{c|c} x & t \\ \hline 2 & 0 \\ 4 & \pi/3 \end{array}\right|.$$

На отрезке $[0, \pi/3]$ функция $2\sec t$ монотонна, что обеспечивает законность подстановки.

Следовательно,

$$\int_2^4 \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^4}\,dx=\int_0^{\pi/3} \frac{\sqrt{4\sec^2 t-4}}{16\sec^4 t}\cdot 2\frac{\sin t}{\cos^2 t}\,dt=$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{\pi/3} \sin^2 t\cos t\,dt=\frac{1}{12}\sin^3 t\,\Big|_0^{\pi/3}=\frac{\sqrt{3}}{32}.$$

6.4.3. Вычислить интегралы:

а) $\displaystyle\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx$; б) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$.

6.4.4. Вычислить интегралы:

а) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x\,dx}{6-5\sin x+\sin^2 x}$; б) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2+\cos x}$.

Решение. а) Применим подстановку

$$\sin x = t; \qquad \left|\begin{array}{c|c} x & t \\ \hline 0 & 0 \\ \pi/2 & 1 \end{array}\right|.$$
$$\cos x\,dx = dt;$$

Обратная функция $x = \arcsin t$ ($0 \leqslant x \leqslant \pi/2$ при $0 \leqslant t \leqslant 1$) удовлетворяет всем условиям теоремы о замене переменной. Следовательно,

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x\,dx}{6-5\sin x+\sin^2 x} = \int_0^1 \frac{dt}{6-5t+t^2} = \ln\frac{t-3}{t-2}\Big|_0^1 = \ln\frac{4}{3}.$$

б) Применим подстановку $t = \operatorname{tg}(x/2)$,

$$x = 2\operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \qquad \left|\begin{array}{c|c} x & t \\ \hline 0 & 0 \\ \pi/2 & 1 \end{array}\right|,$$

законность которой обеспечивается монотонностью функции $\operatorname{tg}(x/2)$ на отрезке $[0,\ \pi/2]$.

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2+\cos x} = \int_0^1 \frac{1}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = 2\int_0^1 \frac{dt}{3+t^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{3}}\Big|_0^1 =$$
$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} - \operatorname{arctg} 0\right) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

6.4.5. Вычислить интеграл

$$\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x} \qquad (a > 0,\ b > 0).$$

Решение. Применим подстановку

$$\operatorname{tg} x = t, \qquad \left|\begin{array}{c|c} x & t \\ \hline 0 & 0 \\ \pi/4 & 1 \end{array}\right|.$$
$$\frac{dx}{\cos^2 x} = dt,$$

Следовательно,

$$\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x} = \int_0^1 \frac{dt}{a^2+b^2t^2} = \frac{1}{b^2}\int_0^1 \frac{dt}{\frac{a^2}{b^2}+t^2} =$$
$$= \frac{1}{b^2}\cdot\frac{b}{a}\operatorname{arctg}\frac{bt}{a}\Big|_0^1 = \frac{1}{ab}\operatorname{arctg}\frac{b}{a}.$$

Если $a=b=1$, то $\frac{1}{ab}\operatorname{arctg}\frac{b}{a}=\operatorname{arctg} 1=\frac{\pi}{4}$, что, конечно, совпадает с результатом подстановки $a=b=1$ в исходный интеграл

$$\int_0^{\pi/4}\frac{dx}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}=\int_0^{\pi/4}dx=\frac{\pi}{4}.$$

6.4.6. Вычислить интегралы:

а) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}\,dx$; б) $\displaystyle\int_1^{e^2}\frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$; в) $\displaystyle\int_3^{2}\frac{\sqrt[3]{(x-2)^2}}{3+\sqrt[3]{(x-2)^2}}\,dx$.

6.4.7. Вычислить интеграл $I=\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$.

Решение. Представим этот интеграл в виде суммы двух интегралов:

$$I=\int_0^{\pi/2}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx+\int_{\pi/2}^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx=I_1+I_2.$$

К интегралу

$$I_2=\int_{\pi/2}^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$$

применим подстановку

$$x=\pi-t,\qquad dx=-dt,\qquad \left|\begin{array}{c|c} x & t \\ \hline \pi/2 & \pi/2 \\ \pi & 0 \end{array}\right|.$$

Тогда

$$I_2=-\int_{\pi/2}^{0}\frac{(\pi-t)\sin(\pi-t)}{1+\cos^2(\pi-t)}\,dt=\int_0^{\pi/2}\frac{(\pi-t)\sin t}{1+\cos^2 t}\,dt=$$

$$=\pi\int_0^{\pi/2}\frac{\sin t}{1+\cos^2 t}\,dt-\int_0^{\pi/2}\frac{t\sin t}{1+\cos^2 t}\,dt.$$

Следовательно,

$$I=I_1+I_2=\int_0^{\pi/2}\frac{x\sin x\,dx}{1+\cos^2 x}+\pi\int_0^{\pi/2}\frac{\sin t\,dt}{1+\cos^2 t}-\int_0^{\pi/2}\frac{t\sin t\,dt}{1+\cos^2 t}.$$

Так как первый и третий интегралы отличаются только обозначением переменной интегрирования, то

$$I=\pi\int_0^{\pi/2}\frac{\sin t\,dt}{1+\cos^2 t}.$$

К этому интегралу применим подстановку

$$u=\cos t,\quad du=-\sin t\,dt,\qquad \begin{array}{|c|c|} t & u \\ \hline 0 & 1 \\ \pi/2 & 0 \end{array},$$

$$I=-\pi\int_1^0 \frac{du}{1+u^2}=\pi\int_0^1 \frac{du}{1+u^2}=\frac{\pi^2}{4}.$$

Замечание. Неопределенный интеграл $\int \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$ не выражается в элементарных функциях. Однако данный определенный интеграл, как мы показали, вычисляется, если прибегнуть к искусственному приему.

6.4.8. Вычислить интеграл

$$I=\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,dx.$$

Решение. Применим подстановку

$$x=\operatorname{tg} t,\quad dx=\frac{dt}{\cos^2 t},\qquad \begin{array}{|c|c|} x & t \\ \hline 0 & 0 \\ 1 & \pi/4 \end{array}.$$

Следовательно,

$$I=\int_0^{\pi/4} \frac{\ln(1+\operatorname{tg} t)\sec^2 t}{\sec^2 t}\,dt=\int_0^{\pi/4} \ln(1+\operatorname{tg} t)\,dt.$$

Преобразуем сумму $1+\operatorname{tg} t$:

$$1+\operatorname{tg} t=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}+\operatorname{tg} t=\frac{\sqrt{2}\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos t}.$$

Подставив в интеграл, получим

$$I=\int_0^{\pi/4} \frac{1}{2}\ln 2\,dt+\int_0^{\pi/4} \ln\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)dt-\int_0^{\pi/4} \ln\cos t\,dt=$$

$$=\frac{1}{2}t\ln 2\,\Big|_0^{\pi/4}+\int_0^{\pi/4} \ln\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)dt-\int_0^{\pi/4} \ln\cos t\,dt=$$

$$=\frac{\pi}{8}\ln 2+\int_0^{\pi/4} \ln\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)dt-\int_0^{\pi/4} \ln\cos t\,dt=\frac{\pi}{8}\ln 2+I_1-I_2.$$

Теперь покажем, что $I_1 = I_2$. Для этого к интегралу $I_2 = \int\limits_0^{\pi/4} \ln \cos t\, dt$

применим подстановку

$$t = \frac{\pi}{4} - z, \qquad dt = -dz, \qquad \left|\begin{array}{c|c} t & z \\ \hline 0 & \pi/4 \\ \pi/4 & 0 \end{array}\right|.$$

Тогда

$$I_2 = -\int\limits_{\pi/4}^{0} \ln \cos\left(\frac{\pi}{4} - z\right) dz = \int\limits_0^{\pi/4} \ln \sin\left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} - z\right)\right] dz =$$

$$= \int\limits_0^{\pi/4} \ln \sin\left(\frac{\pi}{4} + z\right) dz = I_1.$$

Поэтому

$$I = \frac{\pi}{8} \ln 2.$$

Этот пример, как и предыдущий, интересен тем, что неопределенный интеграл

$$\int \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\, dx$$

не выражается в элементарных функциях.

6.4.9. Доказать, что всегда можно подобрать линейную подстановку $x = pt + q$ (p, q постоянны) так, чтобы любой данный интеграл с конечными пределами a и b преобразовать в интеграл с пределами 0 и 1.

Решение. Прежде всего отметим, что подстановка $x = pt + q$ очевидным образом удовлетворяет условиям теоремы о замене переменной. Так как при $x = a$ должно быть $t = 0$ и при $x = b$ должно быть $t = 1$, то для определения величин p и q имеем систему уравнений

$$a = p \cdot 0 + q,$$
$$b = p \cdot 1 + q,$$

откуда $p = b - a$, $q = a$. Следовательно,

$$\int\limits_a^b f(x)\, dx = (b-a) \int\limits_0^1 f[(b-a)t + a]\, dt.$$

6.4.10. Вычислить сумму интегралов

$$\int\limits_{-4}^{-5} e^{(x+5)^2}\, dx + 3 \int\limits_{1/3}^{2/3} e^{9\,(x-2/3)^2}\, dx.$$

Решение. Преобразуем каждый из интегралов в интеграл с пределами 0 и 1 (см. предыдущую задачу).

Для этого к первому интегралу применим подстановку $x=-t-4$. Тогда $dx=-dt$ и

$$I_1=\int_{-4}^{-5} e^{(x+5)^2}\,dx=-\int_0^1 e^{(-t+1)^2}\,dt=-\int_0^1 e^{(t-1)^2}\,dt.$$

Ко второму интегралу применим подстановку $x=t/3+1/3$. Тогда $dx=(dt)/3$ и

$$I_2=3\int_{1/3}^{2/3} e^{9(x-2/3)^2}\,dx=\int_0^1 e^{(t-1)^2}\,dt.$$

Отсюда

$$I_1+I_2=-\int_0^1 e^{(t-1)^2}\,dt+\int_0^1 e^{(t-1)^2}\,dt=0.$$

Заметим, что каждый из интегралов $\int e^{(x+5)^2}\,dx$ и $\int e^{9(x-2/3)^2}\,dx$ в отдельности не берется в элементарных функциях.

6.4.11. Доказать, что интеграл

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin 2kx}{\sin x}\,dx$$

при целом k равен нулю.

Решение. Сделаем подстановку

$$x=\pi-t,\qquad dx=-dt,\qquad \begin{array}{|c|c|}\hline x & t\\ \hline 0 & \pi\\ \pi & 0\\ \hline\end{array}.$$

Тогда при целом k получим

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin 2kx}{\sin x}\,dx=-\int_{\pi}^{0}\frac{\sin 2k(\pi-t)}{\sin(\pi-t)}\,dt=-\int_0^{\pi}\frac{\sin 2kt}{\sin t}\,dt.$$

Так как определенный интеграл не зависит от обозначения переменной интегрирования, то

$$I=-I,\text{ откуда } I=0.$$

6.4.12. Вычислить интеграл

$$\int_{1/2}^{\sqrt{3}/2}\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}.$$

Решение. Применим подстановку $x=\sin t$ (данная функция не монотонная), $dx=\cos t\,dt$. Новые пределы t_1 и t_2 находим из уравнений $1/2=\sin t$; $\sqrt{3}/2=\sin t$; можно принять $t_1=\pi/6$ и $t_2=\pi/3$, но можно также выбрать и другие значения, например, $t_1=5\pi/6$ и $t_2=2\pi/3$.

В обоих случаях переменная $x=\sin t$ пробегает весь отрезок $[1/2, \sqrt{3}/2]$ (рис. 64), причем функция $\sin t$ монотонна и на отрезке $[\pi/6, \pi/3]$ и на отрезке $[2\pi/3, 5\pi/6]$.

Покажем, что результаты интегрирования совпадут. В самом деле,

$$\int_{1/2}^{\sqrt{3}/2}\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}=\int_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{\cos t\,dt}{\sin t\cos t}=\int_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{dt}{\sin t}=\ln\left|\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right|\Bigg|_{\pi/6}^{\pi/3}=\ln\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}-\ln\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}=\ln\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}.$$

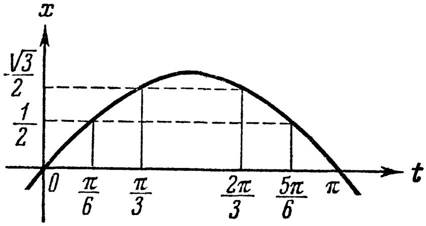

Рис. 64

С другой стороны, учитывая, что на отрезке $[2\pi/3; 5\pi/6]$ $\cos t$ отрицателен, получим

$$\int_{1/2}^{\sqrt{3}/2}\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}=\int_{5\pi/6}^{2\pi/3}\frac{\cos t\,dt}{\sin t\,(-\cos t)}=$$

$$=\int_{2\pi/3}^{5\pi/6}\frac{dt}{\sin t}=\ln\left|\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right|\Bigg|_{2\pi/3}^{5\pi/6}=\ln\frac{\operatorname{tg}\frac{5}{12}\pi}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}}=\ln\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}.$$

Замечание. Полезно подчеркнуть, что нельзя брать $t_1=5\pi/6$, $t_2=\pi/3$, так как при изменении t на отрезке $[\pi/3, 5\pi/6]$ значения функции $x=\sin t$ выходят за пределы отрезка $[1/2, \sqrt{3}/2]$.

6.4.13. Доказать, что функция $L(x)$, задаваемая в промежутке $(0, \infty)$ интегралом

$$L(x)=\int_1^x\frac{dt}{t},$$

обладает следующими свойствами:

$$L(x_1x_2)=L(x_1)+L(x_2),$$

$$L\left(\frac{x_1}{x_2}\right)=L(x_1)-L(x_2).$$

Решение. По свойству аддитивности

$$L(x_1x_2)=\int_1^{x_1x_2}\frac{dt}{t}=\int_1^{x_1}\frac{dt}{t}+\int_{x_1}^{x_1x_2}\frac{dt}{t}.$$

Во втором интеграле произведем замену переменной

$$t=x_1z,\quad dt=x_1dz,\qquad \left|\begin{array}{c|c} t & z \\ \hline x_1 & 1 \\ x_1x_2 & x_2 \end{array}\right|.$$

Тогда

$$L(x_1x_2)=\int_1^{x_1}\frac{dt}{t}+\int_1^{x_2}\frac{dz}{z}=L(x_1)+L(x_2).$$

Полагая здесь $x_1x_2=x_3$; $x_2=x_3/x_1$, получим

$$L(x_3)=L(x_1)+L(x_3/x_1),\quad \text{т. е.}\quad L(x_3/x_1)=L(x_3)-L(x_1).$$

Легко также получить и другое следствие $L(x^{m/n})=\frac{m}{n}L(x)$ для любых целых m и n.

Действительно, для положительных m и n это следует из соотношений

$$L(x^{m/n})=mL(x^{1/n}),\quad L(x)=nL(x^{1/n}),$$

а для отрицательного показателя из

$$L(1)=0,\quad L(x^{-1})=L\left(\frac{1}{x}\right)=L(1)-L(x)=-L(x).$$

Теперь, пользуясь непрерывностью интеграла как функции верхнего предела, можно получить общее свойство $L(x^a)=aL(x)$.

Замечание. Как известно, $L(x)=\ln x$. Мы здесь получили основные свойства логарифма, исходя лишь из его определения с помощью интеграла.

6.4.14. Преобразовать интеграл $\int_0^3(x-2)^2\,dx$ с помощью подстановки $(x-2)^2=t$.

Решение. Формальное применение подстановки на всем отрезке $[0, 3]$ приведет к неверному результату, так как обратная функция $x=\varphi(t)$ двузначна: $x=2\pm\sqrt{t}$, т. е. функция x имеет две ветви, $x_1=2-\sqrt{t}$; $x_2=2+\sqrt{t}$. Первая не может принимать значений $x>2$, а вторая — значений $x<2$. Чтобы получить верный результат, надо разбить данный интеграл следующим образом:

$$\int_0^3(x-2)^2\,dx=\int_0^2(x-2)^2\,dx+\int_2^3(x-2)^2\,dx,$$

и в первом интеграле положить $x=2-\sqrt{t}$, а во втором $x=2+\sqrt{t}$. Тогда получим

$$I_1=\int_0^2 (x-2)^2\,dx=-\int_4^0 t\frac{dt}{2\sqrt{t}}=\frac{1}{2}\int_0^4\sqrt{t}\,dt=\frac{8}{3},$$

$$I_2=\int_2^3 (x-2)^2\,dx=\int_0^1 t\frac{dt}{2\sqrt{t}}=\frac{1}{2}\int_0^1\sqrt{t}\,dt=\frac{1}{3}.$$

Следовательно, $I=8/3+1/3=3$. Этот результат — верный, в чем можно легко убедиться, вычислив исходный интеграл непосредственно:

$$\int_0^3 (x-2)^2\,dx=\left.\frac{(x-2)^3}{3}\right|_0^3=\frac{1}{3}+\frac{8}{3}=3.$$

6.4.15. Вычислить интегралы:

а) $I=\int_0^1\frac{dx}{1+\sqrt{x}}$; б) $I=\int_0^5\frac{dx}{2x+\sqrt{3x+1}}$;

в) $I=\int_{\pi/4}^{\pi/3}\frac{dx}{1-\sin x}$; г) $I=\int_0^1\sqrt{2x-x^2}\,dx$;

д) $I=\int_0^{\pi/4}\frac{\sin x+\cos x}{3+\sin 2x}\,dx$; е) $I=\int_0^a x^2\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\,dx,\ a>0$;

ж) $I=\int_0^{2a}\sqrt{2ax-x^2}\,dx$; з) $I=\int_{-1}^1\frac{dx}{(1+x^2)^2}$.

6.4.16. Применяя подходящую замену переменной, найти следующие определенные интегралы:

а) $\int_0^2\frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}}$; б) $\int_0^a\frac{dx}{x+\sqrt{a^2-x^2}}$;

в) $\int_1^2\frac{dx}{x(1+x^4)}$; г) $\int_{\sqrt{(3a^2+b^2)/2}}^{\sqrt{(a^2+b^2)/2}}\frac{x\,dx}{\sqrt{(x^2-a^2)(b^2-x^2)}}$.

6.4.17. Рассмотрим интеграл $\int_{-2}^2\frac{dx}{4+x^2}$. Легко заключить, что он равен $\pi/4$. Действительно,

$$\int_{-2}^2\frac{dx}{4+x^2}=\frac{1}{2}\left.\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\right|_{-2}^2=\frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]=\frac{\pi}{4}.$$

С другой стороны, применив подстановку $x=1/t$, будем иметь

$$dx=-\frac{dt}{t^2}, \qquad \begin{array}{|c|c|} x & t \\ \hline -2 & -1/2 \\ 2 & 1/2 \end{array},$$

$$\int\limits_{-2}^{2}\frac{dx}{4+x^2}=-\int\limits_{-1/2}^{1/2}\frac{dt}{t^2\left(4+\frac{1}{t^2}\right)}=-\int\limits_{-1/2}^{1/2}\frac{dt}{4t^2+1}=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}2t\,\Big|_{-1/2}^{1/2}=-\frac{\pi}{4}.$$

Этот результат явно неверный, так как подынтегральная функция $1/(4+x^2)>0$, а следовательно, определенный интеграл от такой функции не может равняться отрицательному числу $-\pi/4$. В чем ошибка?

6.4.18. Рассмотрим интеграл $I=\int\limits_0^{2\pi}\frac{dx}{5-2\cos x}$. Применив подстановку $\operatorname{tg}(x/2)=t$, будем иметь

$$\int\limits_0^{2\pi}\frac{dx}{5-2\cos x}=\int\limits_0^{0}\frac{2\,dt}{(1+t^2)\left(5-2\,\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}=0.$$

Результат явно неверный, так как подынтегральная функция положительная, а следовательно, интеграл от этой функции не может быть равен нулю. В чем ошибка?

6.4.19. Убедиться в том, что формальная замена переменной $t=x^{2/5}$ приводит к неверному результату в интеграле $\int\limits_{-2}^{2}\sqrt[5]{x^2}\,dx$, и объяснить, в чем ошибка?

6.4.20. Можно ли в интеграле $I=\int\limits_0^1\sqrt{x^2+1}\,dx$ сделать подстановку $x=\sec t$?

6.4.21. Пусть имеем интеграл $\int\limits_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx$. Применим подстановку $x=\sin t$. Можно ли в качестве пределов для t взять числа π и $\pi/2$?

6.4.22. Доказать равенство

$$\int\limits_{-a}^{a}f(x)\,dx=\int\limits_0^{a}[f(x)+f(-x)]\,dx$$

для любой непрерывной функции $f(x)$.

6.4.23. Преобразовать определенный интеграл $\int\limits_0^{2\pi}f(x)\cos x\,dx$ с помощью подстановки $\sin x=t$.