§ 6.5. Упрощение интегралов, основанное на свойствах симметрии подынтегральных функций

1. Если функция $f(x)$ четная на отрезке $[-a, a]$, то

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx.$$

2. Если функция $f(x)$ нечетная на отрезке $[-a, a]$, то

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0.$$

3. Если функция $f(x)$ периодическая с периодом T, то

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \int_{a+nT}^{b+nT} f(x)\,dx,$$

где n — целое число.

6.5.1. Вычислить интеграл $\int_{-1}^{1} |x|\,dx$.

Решение. Так как подынтегральная функция $f(x)=|x|$ — четная функция, то

$$\int_{-1}^{1} |x|\,dx = 2\int_{0}^{1} |x|\,dx = 2\int_{0}^{1} x\,dx = x^2\Big|_0^1 = 1.$$

6.5.2. Вычислить интеграл

$$\int_{-7}^{7} \frac{x^4 \sin x}{x^6+2}\,dx.$$

Решение. Так как подынтегральная функция нечетна, то сразу заключаем, что интеграл равен нулю.

6.5.3. Чему равны интегралы:

а) $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\,dx$;

б) $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\,dx$,

если: 1) $f(x)$ — четная функция; 2) $f(x)$ — нечетная функция.

6.5.4. Вычислить интеграл $\int_{-5}^{5} \frac{x^5 \sin^2 x}{x^4+2x^2+1}\,dx$.

6.5.5. Вычислить интеграл $\int\limits_{\pi}^{5\pi/4} \frac{\sin 2x}{\cos^4 x + \sin^4 x}\, dx$.

Решение. Подынтегральная функция является периодической функцией с периодом π, так как

$$f(x+\pi) = \frac{\sin 2(x+\pi)}{\cos^4 (x+\pi) + \sin^4 (x+\pi)} = \frac{\sin 2x}{\cos^4 x + \sin^4 x} = f(x).$$

Поэтому можно от верхнего и нижнего пределов интегрирования отнять число π:

$$\int\limits_{\pi}^{5\pi/4} \frac{\sin 2x\, dx}{\cos^4 x + \sin^4 x} = \int\limits_{0}^{\pi/4} \frac{\sin 2x\, dx}{\cos^4 x + \sin^4 x} = 2 \int\limits_{0}^{\pi/4} \frac{\operatorname{tg} x\, dx}{\cos^2 x\,(1+\operatorname{tg}^4 x)}.$$

Применим подстановку

$$t = \operatorname{tg} x, \quad dt = \frac{dx}{\cos^2 x},$$

x	t
0	0
$\pi/4$	1

,

$$2 \int\limits_{0}^{\pi/4} \frac{\operatorname{tg} x\, dx}{\cos^2 x\,(1+\operatorname{tg}^4 x)} = \int\limits_{0}^{1} \frac{2t\, dt}{1+t^4} = \operatorname{arctg} t^2 \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

6.5.6. Доказать равенство

$$\int\limits_{-a}^{a} \cos x f(x^2)\, dx = 2 \int\limits_{0}^{a} \cos x f(x^2)\, dx.$$

Решение. Для доказательства достаточно установить четность подынтегральной функции:

$$\cos(-x) f[(-x)^2] = \cos x f(x^2).$$

6.5.7. Вычислить интеграл

$$\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \frac{2x^7 + 3x^6 - 10x^5 - 7x^3 - 12x^2 + x + 1}{x^2+2}\, dx.$$

Решение.

$$\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \frac{2x^7 + 3x^6 - 10x^5 - 7x^3 - 12x^2 + x + 1}{x^2+2}\, dx =$$

$$= \int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \frac{2x^7 - 10x^5 - 7x^3 + x}{x^2+2}\, dx + \int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \frac{3x^2(x^4-4)+1}{x^2+2}\, dx =$$

$$= 0 + 2\int\limits_0^{\sqrt{2}} \left[3(x^4 - 2x^2) + \frac{1}{x^2+1}\right] dx =$$

$$= \frac{6}{5}x^5 - 4x^3 + \frac{2}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} \Big|_0^{\sqrt{2}} = -\frac{16}{5}\sqrt{2} + \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

При вычислении мы разложили интеграл в сумму двух интегралов таким образом, чтобы под знаком первого интеграла стояла нечетная функция, а под знаком второго интеграла — четная функция.

6.5.8. Вычислить интеграл

$$\int\limits_{-1/2}^{1/2} \cos x \ln \frac{1+x}{1-x}\, dx.$$

Решение. Функция $f(x) = \cos x$ четна. Докажем, что функция $\varphi(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$ нечетна:

$$\varphi(-x) = \ln \frac{1-x}{1+x} = \ln \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{-1} = -\ln \frac{1+x}{1-x} = -\varphi(x).$$

Таким образом, подынтегральная функция представляет собой произведение четной и нечетной функций, т. е. является нечетной функцией, поэтому

$$\int\limits_{-1/2}^{1/2} \cos x \ln \frac{1+x}{1-x}\, dx = 0.$$

6.5.9. Доказать справедливость следующих равенств:

а) $\int\limits_{-\pi/8}^{\pi/8} x^8 \sin^9 x\, dx = 0$; б) $\int\limits_{-1/2}^{1/2} e^{\cos x}\, dx = 2\int\limits_0^{1/2} e^{\cos x}\, dx$;

в) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx\, dx = 0$ (m, n — натуральные числа);

г) $\int\limits_{-a}^{a} \sin x f(\cos x)\, dx = 0$.

6.5.10. Доказать равенство

$$\int\limits_a^b f(x)\, dx = \int\limits_a^b f(a+b-x)\, dx.$$

Решение. В правом интеграле сделаем подстановку

$x = a + b - t$, $dx = -dt$,

x	t
a	b
b	a

.

Тогда получим

$$\int_a^b f(a+b-x)\,dx = -\int_b^a f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Замечание. Соотношению, установленному между интегралами, можно дать наглядную геометрическую интерпретацию.

График функции $f(x)$, рассматриваемой на отрезке $[a, b]$, симметричен графику функции $f(a+b-x)$, рассматриваемой на том же отрезке, относительно прямой $x=(a+b)/2$. Действительно, если точка A лежит на оси Ox и имеет абсциссу x, то симметричная ей относительно указанной прямой точка A' имеет абсциссу $x'=a+b-x$. Поэтому $f(a+b-x')=f[a+b-(a+b-x)]=f(x)$. Но симметричные фигуры имеют равные площади, которые выражаются определенными интегралами. Итак, доказанное равенство есть равенство площадей двух симметричных криволинейных трапеций.

6.5.11. Доказать равенство

$$\int_0^t f(x)\,g(t-x)\,dx = \int_0^t g(x)\,f(t-x)\,dx.$$

Решение. В правом интеграле применим подстановку $t-x=z$; тогда будем иметь

$$-\int_t^0 g(t-z)\,f(z)\,dz = \int_0^t f(z)\,g(t-z)\,dz.$$

6.5.12. Доказать равенство $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^m x\,dx = \int\limits_0^{\pi/2} \cos^m x\,dx$ и применить полученный результат к вычислению интегралов

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2 x\,dx \quad \text{и} \quad \int_0^{\pi/2} \sin^2 x\,dx.$$

Решение. На основании **6.5.10** будем иметь

$$\int_0^{\pi/2} \sin^m x\,dx = \int_0^{\pi/2} \sin^m\left(\frac{\pi}{2}-x\right)dx = \int_0^{\pi/2} \cos^m x\,dx.$$

Следовательно, в частности,

$$I = \int_0^{\pi/2} \sin^2 x\,dx = \int_0^{\pi/2} \cos^2 x\,dx;$$

сложим эти интегралы:

$$2I = \int_0^{\pi/2} (\sin^2 x + \cos^2 x)\,dx = \int_0^{\pi/2} dx = \frac{\pi}{2};$$

отсюда $I=\pi/4$.

6.5.13. Доказать равенство

$$\int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx = 2\int_0^{\pi/2} f(\sin x)\,dx.$$

Решение. Так как

$$\int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx = \int_0^{\pi/2} f(\sin x)\,dx + \int_{\pi/2}^{\pi} f(\sin x)\,dx,$$

то достаточно доказать, что

$$\int_{\pi/2}^{\pi} f(\sin x)\,dx = \int_0^{\pi/2} f(\sin x)\,dx.$$

К левому интегралу применим подстановку

$$x = \pi - t, \quad dx = -dt, \qquad \left|\begin{array}{c|c} x & t \\ \hline \pi/2 & \pi/2 \\ \pi & 0 \end{array}\right|.$$

Тогда

$$\int_{\pi/2}^{\pi} f(\sin x)\,dx = -\int_{\pi/2}^{0} f[\sin(\pi - t)]\,dt =$$

$$= \int_0^{\pi/2} f(\sin t)\,dt = \int_0^{\pi/2} f(\sin x)\,dx.$$

6.5.14. Доказать равенство

$$\int_0^{\pi} x f(\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx.$$

Решение. К левому интегралу применим подстановку

$$x = \pi - t, \quad dx = -dt, \qquad \left|\begin{array}{c|c} x & t \\ \hline 0 & \pi \\ \pi & 0 \end{array}\right|.$$

Тогда получим

$$\int_0^{\pi} x f(\sin x)\,dx = -\int_{\pi}^{0} (\pi - t) f[\sin(\pi - t)]\,dt =$$

$$= \int_0^{\pi} \pi f(\sin t)\,dt - \int_0^{\pi} t f(\sin t)\,dt.$$

Отсюда

$$2\int_0^\pi xf(\sin x)\,dx=\pi\int_0^\pi f(\sin x)\,dx,$$

что равносильно доказываемому равенству.

6.5.15. Используя равенство

$$\frac{\sin(n+1/2)x}{2\sin(x/2)}=\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\ldots+\cos nx,$$

доказать, что

$$\int_0^\pi \frac{\sin(n+1/2)x}{\sin(x/2)}\,dx=\pi.$$

6.5.16. Доказать, что если $\varphi(x)=\frac{1}{2}a_0+a_1\cos x+b_1\sin x+$ $+a_2\cos 2x+b_2\sin 2x+\ldots+a_n\cos nx+b_n\sin nx$, то:

а) $\int_0^{2\pi}\varphi(x)\,dx=\pi a_0$; б) $\int_0^{2\pi}\varphi(x)\cos kx\,dx=\pi a_k$;

в) $\int_0^{2\pi}\varphi(x)\sin kx\,dx=\pi b_k$ $(k=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$.

§ 6.6. Интегрирование по частям. Вывод рекуррентных формул

Если u и v—функции от x, обладающие непрерывными производными, то

$$\int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx=u(x)\,v(x)\Big|_a^b-\int_a^b v(x)\,u'(x)\,dx$$

или, в более короткой записи,

$$\int_a^b u\,dv=uv\Big|_a^b-\int_a^b v\,du.$$

6.6.1. Вычислить интеграл $\int_0^1 xe^x\,dx$.

Решение. Положим

$$x=u,\qquad e^x\,dx=dv;$$
$$du=dx;\qquad v=e^x,$$

что законно, так как функции $u=x$ и $v=e^x$ непрерывны и имеют непрерывные производные на отрезке $[0,\ 1]$.

Пользуясь формулой интегрирования по частям, получим

$$\int_0^1 xe^x\,dx=xe^x\Big|_0^1-\int_0^1 e^x\,dx=e-e^x\Big|_0^1=1.$$