Отсюда

$$2\int_0^{\pi} xf(\sin x)\,dx=\pi\int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx,$$

что равносильно доказываемому равенству.

6.5.15. Используя равенство

$$\frac{\sin(n+1/2)x}{2\sin(x/2)}=\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\ldots+\cos nx,$$

доказать, что

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin(n+1/2)x}{\sin(x/2)}\,dx=\pi.$$

6.5.16. Доказать, что если $\varphi(x)=\frac{1}{2}a_0+a_1\cos x+b_1\sin x+$ $+a_2\cos 2x+b_2\sin 2x+\ldots+a_n\cos nx+b_n\sin nx$, то:

а) $\int\limits_0^{2\pi}\varphi(x)\,dx=\pi a_0$; б) $\int\limits_0^{2\pi}\varphi(x)\cos kx\,dx=\pi a_k$;

в) $\int\limits_0^{2\pi}\varphi(x)\sin kx\,dx=\pi b_k$ $(k=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$.

§ 6.6. Интегрирование по частям. Вывод рекуррентных формул

Если u и v — функции от x, обладающие непрерывными производными, то

$$\int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx=u(x)\,v(x)\Big|_a^b-\int_a^b v(x)\,u'(x)\,dx$$

или, в более короткой записи,

$$\int_a^b u\,dv=uv\Big|_a^b-\int_a^b v\,du.$$

6.6.1. Вычислить интеграл $\int\limits_0^1 xe^x\,dx$.

Решение. Положим

$$x=u,\qquad e^x\,dx=dv;$$
$$du=dx;\qquad v=e^x,$$

что законно, так как функции $u=x$ и $v=e^x$ непрерывны и имеют непрерывные производные на отрезке $[0,\ 1]$.

Пользуясь формулой интегрирования по частям, получим

$$\int_0^1 xe^x\,dx=xe^x\Big|_0^1-\int_0^1 e^x\,dx=e-e^x\Big|_0^1=1.$$

6.6.2. Вычислить интеграл $I=\int\limits_0^{\pi/b} e^{ax}\sin bx\,dx$.

Решение. Положим

$$u=\sin bx, \qquad dv=e^{ax}\,dx;$$

$$du=b\cos bx\,dx, \quad v=\frac{1}{a}e^{ax}.$$

Так как функции $u=\sin bx$, $v=\frac{1}{a}e^{ax}$ непрерывны вместе со своими производными на отрезке $[0, \pi]$, то применима формула интегрирования по частям:

$$I=\frac{1}{a}e^{ax}\sin bx\Big|_0^{\pi/b}-\frac{b}{a}\int\limits_0^{\pi/b} e^{ax}\cos bx\,dx=$$

$$=-\frac{b}{a}\int\limits_0^{\pi/b} e^{ax}\cos bx\,dx=-\frac{b}{a}I_1.$$

Применим теперь интегрирование по частям к интегралу I_1. Положим

$$u=\cos bx, \qquad dv=e^{ax}\,dx,$$

$$du=-b\sin bx\,dx, \qquad v=\frac{1}{a}e^{ax}.$$

Тогда

$$I=-\frac{b}{a}\left(\frac{1}{a}e^{ax}\cos bx\Big|_0^{\pi/b}+\frac{b}{a}\int\limits_0^{\pi/b} e^{ax}\sin bx\,dx\right)=$$

$$=-\frac{b}{a}\left(-\frac{e^{a\pi/b}}{a}-\frac{1}{a}\right)-\frac{b^2}{a^2}I=\frac{b\,(e^{a\pi/b}+1)}{a^2}-\frac{b^2}{a^2}I.$$

Отсюда

$$\frac{a^2+b^2}{a^2}I=\frac{b\,(e^{a\pi/b}+1)}{a^2}, \quad I=\frac{b\,(e^{a\pi/b}+1)}{a^2+b^2}.$$

В частности, при $a=b=1$ получаем

$$\int\limits_0^{\pi} e^x\sin x\,dx=\frac{1}{2}(e^{\pi}+1).$$

6.6.3. Вычислить интеграл $\int\limits_1^{e}\ln^3 x\,dx$.

6.6.4. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{\pi^2/4}\sin\sqrt{x}\,dx$.

Решение. Сначала применим подстановку

$$\sqrt{x}=t,\quad x=t^2,\quad dx=2t\,dt,\qquad \left|\begin{array}{c|c} x & t \\ \hline 0 & 0 \\ \pi^2/4 & \pi/2 \end{array}\right|.$$

Отсюда

$$\int_0^{\pi^2/4} \sin\sqrt{x}\,dx = 2\int_0^{\pi/2} t\sin t\,dt.$$

Последний интеграл будем интегрировать по частям. Положим

$$t=u;\quad \sin t\,dt=dv;$$
$$du=dt;\qquad v=-\cos t.$$

Тогда

$$2\int_0^{\pi/2} t\sin t\,dt = 2\left[-t\cos t\,\Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2}\cos t\,dt\right] = 2\sin t\,\Big|_0^{\pi/2} = 2.$$

6.6.5. Вычислить интеграл $I=\int\limits_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}}\,dx.$

6.6.6. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{\pi/2} x^2\sin x\,dx.$

6.6.7. Вычислить интеграл $I_n=\int\limits_0^a (a^2-x^2)^n\,dx$, где n — натуральное число.

Решение. Интеграл можно вычислить, разлагая подынтегральную функцию $(a^2-x^2)^n$ по формуле бинома Ньютона, но это приводит к громоздким выкладкам. Проще вывести рекуррентную формулу, сводящую интеграл I_n к интегралу I_{n-1}. С этой целью разложим интеграл I_n так:

$$I_n=\int_0^a (a^2-x^2)^{n-1}(a^2-x^2)\,dx = a^2 I_{n-1} - \int_0^a x\,(a^2-x^2)^{n-1}\,x\,dx$$

и проинтегрируем последний интеграл по частям:

$$u=x;\qquad (a^2-x^2)^{n-1}\,x\,dx=dv,$$
$$du=dx;\qquad v=-\frac{1}{2n}(a^2-x^2)^n\quad (n\neq 0).$$

Мы получим

$$I_n=a^2 I_{n-1}+\frac{1}{2n}\,x\,(a^2-x^2)^n\,\Big|_0^a-\frac{1}{2n}\int_0^a (a^2-x^2)^n\,dx = a^2 I_{n-1}-\frac{1}{2n}I_n.$$

Отсюда

$$I_n = a^2 \frac{2n}{2n+1} I_{n-1}.$$

Эта рекуррентная формула справедлива при любых действительных n, отличных от 0 и $-1/2$.

В частности, при натуральном n, учитывая, что

$$I_0 = \int_0^a dx = a,$$

получим

$$I_n = a^{2n+1} \frac{2n(2n-2)(2n-4)\ldots 6\cdot 4\cdot 2}{(2n+1)(2n-1)(2n-3)\ldots 5\cdot 3} = a^{2n+1} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!},$$

где

$$(2n)!! = 2\cdot 4\cdot 6\ldots(2n),$$
$$(2n+1)!! = 1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n+1).$$

6.6.8. Пользуясь результатом предыдущей задачи, получить следующую формулу суммирования:

$$1 - \frac{C_n^1}{3} + \frac{C_n^2}{5} - \frac{C_n^3}{7} + \ldots + (-1)^n \frac{C_n^n}{2n+1} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!},$$

где C_n^k — биномиальные коэффициенты.

Решение. Рассмотрим интеграл

$$I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n\, dx = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}.$$

Разлагая степень двучлена по формуле бинома Ньютона и интегрируя в пределах от 0 до 1, получим

$$I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n\, dx =$$
$$= \int_0^1 (1 - C_n^1 x^2 + C_n^2 x^4 - C_n^3 x^6 + \ldots + (-1)^n C_n^n x^{2n})\, dx =$$
$$= \left[x - \frac{C_n^1 x^3}{3} + \frac{C_n^2 x^5}{5} - \frac{C_n^3 x^7}{7} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^1 =$$
$$= 1 - \frac{C_n^1}{3} + \frac{C_n^2}{5} - \frac{C_n^3}{7} + \ldots + \frac{(-1)^n}{2n+1},$$

что и требовалось доказать.

6.6.9. Вычислить интеграл

$$H_m = \int_0^{\pi/2} \sin^m x\, dx = \int_0^{\pi/2} \cos^m x\, dx$$

(m — натуральное число).

Решение. Подстановка

$$\sin x = t, \qquad \cos x\,dx = dt,$$

x	t
0	0
$\pi/2$	1

сводит второй интеграл к интегралу

$$H_m = \int_0^{\pi/2} (1-\sin^2 x)^{(m-1)/2} \cos x\,dx = \int_0^1 (1-t^2)^{(m-1)/2}\,dt,$$

рассмотренному в **6.6.7.** с $a=1$ и $n=(m-1)/2$. Поэтому здесь справедлива рекуррентная формула

$$H_m = \frac{m-1}{m} H_{m-2} \qquad (m \neq 0,\ m \neq 1),$$

так как

$$H_m = I_{(m-1)/2} = \frac{2\cdot(m-1)/2}{2\cdot(m-1)/2+1} I_{(m-1)/2-1} = \frac{m-1}{m} I_{(m-3)/2} = \frac{m-1}{m} H_{m-2}.$$

Если m — нечетное число, то полученная рекуррентная формула сводит H_m к

$$H_1 = \int_0^{\pi/2} \cos x\,dx = 1,$$

поэтому

$$H_m = \frac{(m-1)!!}{m!!}.$$

Если m — четное число, то рекуррентная формула сводит H_m к

$$H_0 = \int_0^{\pi/2} dx = \frac{\pi}{2},$$

поэтому

$$H_m = \frac{(m-1)!!}{m!!} \frac{\pi}{2}.$$

6.6.10. Вычислить интеграл

$$I = \int_0^{\pi} x \sin^m x\,dx$$

(m — натуральное число).

Решение. Воспользуемся результатами **6.5.14** и **6.5.13.** Мы получим

$$I = \int_0^{\pi} x \sin^m x\,dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \sin^m x\,dx = \pi \int_0^{\pi/2} \sin^m x\,dx,$$

что с учетом результата **6.6.9** дает

$$I=\int_0^{\pi} x\sin^m x\,dx=\begin{cases}\dfrac{\pi^2}{2}\cdot\dfrac{(m-1)!!}{m!!} & \text{при } m \text{ четном},\\[2mm] \pi\,\dfrac{(m-1)!!}{m!!} & \text{при } m \text{ нечетном}.\end{cases}$$

6.6.11. Вычислить интеграл $I_n=\int\limits_0^1 x^m(\ln x)^n\,dx$; $m>0$, n — натуральное число.

Решение. Прежде всего заметим, что хотя подынтегральная функция $f(x)=x^m(\ln x)^n$ при $x=0$ смысла не имеет, при любом $m>0$ и $n>0$ ее можно сделать непрерывной на отрезке $[0, 1]$, положив $f(0)=0$. В самом деле,

$$\lim_{x\to+0} x^m(\ln x)^n=\lim_{x\to+0}(x^{m/n}\ln x)^n=0$$

в силу **3.2.4.**

Отсюда, в частности, следует, что интеграл I_n существует при $m>0$, $n>0$. Для его вычисления применим интегрирование по частям, положив

$$u=(\ln x)^n, \qquad dv=x^m\,dx,$$

$$du=\frac{n(\ln x)^{n-1}}{x}\,dx, \quad v=\frac{x^{m+1}}{m+1}.$$

Следовательно,

$$I_n=\int_0^1 x^m(\ln x)^n\,dx=\frac{x^{m+1}(\ln x)^n}{m+1}\Bigg|_0^1-\frac{n}{m+1}\int_0^1 x^m(\ln x)^{n-1}\,dx=$$

$$=-\frac{n}{m+1}I_{n-1}.$$

Мы получили рекуррентную формулу, сводящую I_n к I_{n-1}. В частности, при натуральном n, учитывая, что

$$I_0=\int_0^1 x^m\,dx=\frac{1}{m+1},$$

получим

$$I_n=(-1)^n\frac{n!}{(m+1)^{n+1}}.$$

6.6.12. Вычислить интеграл $I_{m,n}=\int\limits_0^1 x^m(1-x)^n\,dx$, где m и n — целые неотрицательные числа.

Решение. Положим

$$(1-x)^n=u; \qquad x^m\,dx=dv;$$

$$du=-n(1-x)^{n-1}\,dx; \quad v=\frac{x^{m+1}}{m+1}.$$

Тогда

$$I_{m,n}=\left[\frac{x^{m+1}}{m+1}(1-x)^n\right]_0^1+\frac{n}{m+1}\int_0^1 x^{m+1}(1-x)^{n-1}\,dx=\frac{n}{m+1}I_{m+1,\,n-1}.$$

Полученная рекуррентная формула справедлива для всех $n>0$ и $m>-1$. Если n—целое положительное число, то, применяя последовательно эту формулу n раз, получим

$$I_{m,n}=\frac{n}{m+1}I_{m+1,\,n-1}=\frac{n(n-1)}{(m+1)(m+2)}I_{m+2,\,n-2}=\ldots$$
$$\ldots=\frac{n(n-1)\ldots[n-(n-1)]}{(m+1)(m+2)\ldots(m+n)}I_{m+n,\,0}.$$

Но

$$I_{m+n,\,0}=\int_0^1 x^{m+n}\,dx=\left.\frac{x^{m+n+1}}{m+n+1}\right|_0^1=\frac{1}{m+n+1}.$$

Следовательно,

$$I_{m,n}=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots3\cdot2\cdot1}{(m+1)(m+2)\ldots(m+n)(m+n+1)}.$$

Если m—тоже целое неотрицательное число, то полученный результат можно записать в виде

$$I_{m,n}=\frac{m!\,n!}{(m+n+1)!}.$$

6.6.13. Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_0^1 \operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx$; б) $\int\limits_0^1 (x-1)e^{-x}\,dx$;

в) $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3}\frac{x\,dx}{\sin^2 x}$; г) $\int\limits_0^1 x\operatorname{arctg}x\,dx$;

д) $\int\limits_0^1 x\ln(1+x^2)\,dx$; е) $\int\limits_0^{\pi/4}\ln(1+\operatorname{tg}x)\,dx$;

ж) $\int\limits_0^{\pi/2}\sin 2x\operatorname{arctg}(\sin x)\,dx$; з) $\int\limits_1^{16}\operatorname{arctg}\sqrt{\sqrt{x}-1}\,dx$.

6.6.14. Доказать, что

$$\int_0^1(\arccos x)^n\,dx=n\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1}-n(n-1)\int_0^1(\arccos x)^{n-2}\,dx\qquad(n>1).$$

6.6.15. Доказать, что если $f''(x)$ непрерывна на отрезке $[a,\ b]$, то справедлива формула

$$\int_a^b xf''(x)\,dx=[bf'(b)-f(b)]-[af'(a)-f(a)].$$