§ 6.7. Приближенное вычисление определенных интегралов

1. *Формула трапеций.* Отрезок $[a, b]$ разбивают на n равных частей точками $x_k = a + kh$, где $h = (b-a)/n$, $k = 0, 1, \ldots, n$, и применяют формулу

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\left[\frac{1}{2}f(x_0) + f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1}) + \frac{1}{2}f(x_n)\right].$$

Погрешность R этой формулы оценивается так:

$$|R| \leqslant \frac{M_2(b-a)^3}{12n^2}, \text{ где } M_2 = \sup_{a \leqslant x \leqslant b} |f''(x)|$$

(в предположении ограниченности второй производной).

2. *Формула Симпсона.* Отрезок $[a, b]$ разбивают на $2n$ равных частей точками $x_k = a + kh$, где $h = (b-a)/2n$, и применяют формулу

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6n}\{f(x_0) + f(x_{2n}) + 4[f(x_1) + f(x_3) + \ldots + f(x_{2n-1})] +$$
$$+ 2[f(x_2) + f(x_4) + \ldots + f(x_{2n-2})]\}.$$

В предположении существования и ограниченности $f^{\mathrm{IV}}(x)$ для погрешности этой формулы справедлива оценка

$$|R| \leqslant \frac{M_4(b-a)^5}{180(2n)^4}, \quad \text{где} \quad M_4 = \sup_{a \leqslant x \leqslant b} |f^{\mathrm{IV}}(x)|.$$

6.7.1. Вычислить приближенно интеграл $I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x}$ по формуле трапеций при $n = 10$.

Решение. Составим таблицу значений подынтегральной функции, причем будем вычислять ординаты $y_i = f(x_i)$ ($i = 0, 1, \ldots, 10$) с четырьмя знаками после запятой.

x_i	$1+x_i$	$y_i = \frac{1}{1+x_i}$	x_i	$1+x_i$	$y_i = \frac{1}{1+x_i}$
0,0000	1,0000	1,0000	0,6000	1,6000	0,6250
0,1000	1,1000	0,9091	0,7000	1,7000	0,5882
0,2000	1,2000	0,8333	0,8000	1,8000	0,5556
0,3000	1,3000	0,7692	0,9000	1,9000	0,5263
0,4000	1,4000	0,7143	1,0000	2,0000	0,5000
0,5000	1,5000	0,6667			

По формуле трапеций получим

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} \approx \frac{1}{10}\left(\frac{1{,}0000 + 0{,}5000}{2} + 0{,}9091 + 0{,}8333 + 0{,}7692 +\right.$$
$$\left. + 0{,}7143 + 0{,}6667 + 0{,}6250 + 0{,}5882 + 0{,}5556 + 0{,}5263\right) =$$
$$= \frac{1}{10} \cdot 6{,}9377 = 0{,}69377 \approx 0{,}6938.$$

Произведем оценку погрешности полученного результата. Имеем $f''(x)=2/(1+x)^3$. Так как $0 \leqslant x \leqslant 1$, то $|f''(x)| \leqslant 2$. Следовательно, в качестве M_2 можно взять число 2. Отсюда находим оценку погрешности:

$$|R| \leqslant \frac{2}{12 \cdot 10^2} = \frac{1}{600} < 0{,}0017.$$

Мы вычисляли ординаты с четырьмя знаками после запятой, при этом погрешность от округления ординат не превосходит величины $\frac{0{,}00005}{10}(1+9\cdot 1)=0{,}00005$ (а точнее, $\frac{0{,}00005}{10}\cdot 9=0{,}000045$, так как ординаты y_0 и y_{10} — точные числа). Таким образом, общая погрешность, возникшая от применения формулы трапеций и от округления ординат, не превосходит величины 0,0018.

Заметим, что вычисляя заданный интеграл по формуле Ньютона — Лейбница, получим

$$I=\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln(1+x)\Big|_0^1 = \ln 2 \approx 0{,}69315.$$

Таким образом, погрешность полученного результата составляет лишь 0,0007, т. е. мы получили результат с тремя верными знаками.

6.7.2. Вычислить по формуле Симпсона интеграл $\int\limits_{0,5}^{1,5} \frac{e^{0,1x}}{x}\,dx$ с точностью до 0,0001.

Решение. Чтобы подобрать необходимое для обеспечения заданной точности число $2n$, найдем $f^{\text{IV}}(x)$. Последовательно дифференцируя $f(x)=e^{0,1x}/x$, получим

$$f^{\text{IV}}(x)=\frac{e^{0,1x}}{x^5}(0{,}0001x^4-0{,}004x^3+0{,}12x^2-2{,}4x+24)=\frac{P(x)}{x^5}e^{0,1x},$$

где $P(x)$ — многочлен, заключенный в круглых скобках. Функция $\varphi(x)=e^{0,1x}$ возрастает на отрезке $[0{,}5;\ 1{,}5]$ и поэтому достигает своего наибольшего значения при $x=1{,}5$: $\varphi(1{,}5)=e^{0,15}<1{,}2$. Абсолютная величина многочлена $P(x)$, деленного на x^5, оценивается сверху как сумма модулей отдельных членов. При этом наибольшее значение каждого слагаемого достигается при $x=0{,}5$, поэтому

$$\left|\frac{P(x)}{x^5}\right| < \frac{0{,}0001}{x}+\frac{0{,}004}{x^2}+\frac{0{,}12}{x^3}+\frac{2{,}4}{x^4}+\frac{24}{x^5} \leqslant$$

$$\leqslant 0{,}0002+0{,}016+0{,}96+38{,}4+768<808.$$

Таким образом, $|f^{\text{IV}}(x)|<1{,}2\cdot 808<1000$. Следовательно, в качестве M_4 можно взять число 1000.

Нам требуется вычислить интеграл с точностью до 0,0001. Для обеспечения такой точности необходимо, чтобы сумма ошибок метода, действий и окончательного округления не превосходила 0,0001. Для этого подберем число $2n$ (тем самым определится «шаг» h

интегрирования) так, чтобы удовлетворялось неравенство

$$|R| < \frac{1}{2} \cdot 0{,}0001 = 5 \cdot 10^{-5}.$$

Решая неравенство

$$\frac{1^5 \cdot 1000}{180\,(2n)^4} < 5 \cdot 10^{-5},$$

получим

$$2n > 19.$$

Возьмем $2n = 20$; тогда шаг h интегрирования будет равным

$$h = \frac{b-a}{2n} = \frac{1}{20} = 0{,}05.$$

При более точном подсчете получается, что при $2n = 20$

$$|R| < 3{,}5 \cdot 10^{-5}.$$

Если мы будем подсчитывать y_i с пятью знаками после запятой, т. е. с погрешностью не более 10^{-5}, то ошибка окончательного округления будет тоже не больше 10^{-5}. Таким образом, общая ошибка будет меньше, чем $4{,}5 \cdot 10^{-5} < 0{,}0001$.

Составим таблицу значений функции $y = e^{0,1x}/x$ для значений x от 0,5 до 1,5 с шагом $h = 0{,}05$.

Вычисления будем вести с пятью знаками после запятой.

i	x_i	$0,1x_i$	$e^{0,1x_i}$	y_i
0	0,50	0,050	1,05127	2,10254
1	0,55	0,055	1,05654	1,92098
2	0,60	0,060	1,06184	1,76973
3	0,65	0,065	1,06716	1,64178
4	0,70	0,070	1,07251	1,53216
5	0,75	0,075	1,07788	1,43717
6	0,80	0,080	1,08329	1,35411
7	0,85	0,085	1,08872	1,28085
8	0,90	0,090	1,09417	1,21574
9	0,95	0,095	1,09966	1,15754
10	1,00	0,100	1,10517	1,10517
11	1,05	0,105	1,11071	1,05782
12	1,10	0,110	1,11628	1,01480
13	1,15	0,115	1,12187	0,97554
14	1,20	0,120	1,12750	0,93958
15	1,25	0,125	1,13315	0,90652
16	1,30	0,130	1,13883	0,87602
17	1,35	0,135	1,14454	0,84781
18	1,40	0,140	1,15027	0,82162
19	1,45	0,145	1,15604	0,79727
20	1,50	0,150	1,16183	0,77455

Сведем табличные данные для наглядности в следующий расчетный бланк:

i	x_i	y_i		
		при $i=0$ и $i=20$	при i нечетном	при i четном
0	0,50	2,10254		
1	0,55		1,92098	
2	0,60			1,76973
3	0,65		1,64178	
4	0,70			1,53216
5	0,75		1,43717	
6	0,80			1,35411
7	0,85		1,28085	
8	0,90			1,21574
9	0,95		1,15754	
10	1,00			1,10517
11	1,05		1,05782	
12	1,10			1,01480
13	1,15		0,97554	
14	1,20			0,93958
15	1,25		0,90652	
16	1,30			0,87602
17	1,35		0,84781	
18	1,40			0,82162
19	1,45		0,79727	
20	1,50	0,77455		
	Суммы	2,87709	12,02328	10,62893

Применяя формулу Симпсона, получим

$$\int_{0,5}^{1,5} \frac{e^{0,1x}}{x}\,dx \approx \frac{1}{60}(2{,}87709+4\cdot 12{,}02328+2\cdot 10{,}62893)=$$

$$=\frac{1}{60}\cdot 72{,}22807=1{,}2038.$$

6.7.3. Ширина реки 26 *м*; промеры глубины в поперечном сечении реки через каждые 2 *м* дали следующие результаты:

x	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26
y	0,3	0,9	1,7	2,1	2,8	3,4	3,3	3,0	3,5	2,9	1,7	1,2	0,8	0,6

где x означает расстояние от одного берега, а y — соответствующую глубину (в метрах). Зная, что средняя скорость течения 1,3 *м/сек*, определить секундный расход Q воды в реке.

Решение. По формуле трапеций площадь S поперечного сечения

$$S=\int_0^{26} y\,dx \approx 2\left[\frac{1}{2}(0{,}3+0{,}6)+0{,}9+1{,}7+2{,}1+2{,}8+3{,}4+3{,}3+\right.$$

$$\left.+3{,}0+3{,}5+2{,}9+1{,}7+1{,}2+0{,}8\right]=55{,}5\ (м^2).$$

Отсюда секундный расход

$$Q=55{,}5\cdot 1{,}3\approx 72\ (м^3/сек).$$

Оценить погрешность точно здесь нельзя. Некоторые косвенные методы оценок, приводимые в руководствах по численным методам, позволяют указать приближенно порядок погрешности. Погрешность S составляет примерно 3 $м^2$, значит, погрешность Q составляет примерно 4 $м^3/сек$.

6.7.4. Вычислить интегралы:

а) $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sin x}{x}\,dx$ с точностью до 0,001 по формуле Симпсона;

б) $\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ с точностью до 0,001 по формуле трапеций.

6.7.5. По формуле Симпсона вычислить приближенное значение интеграла

$$I=\int_{1,05}^{1,36} f(x)\,dx,$$

если подынтегральная функция задана следующей таблицей:

x	1,05	1,10	1,15	1,20	1,25	1,30	1,35
$f(x)$	2,36	2,50	2,74	3,04	3,46	3,98	4,6

§ 6.8. Дополнительные задачи

6.8.1. Дана функция

$$f(x)=\begin{cases} 1-x & \text{при } 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 0 & \text{при } 1<x\leqslant 2,\\ (2-x)^2 & \text{при } 2<x\leqslant 3.\end{cases}$$

Проверить непосредственно, что функция

$$F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$$

непрерывна в промежутке [0, 3] и что ее производная в каждой внутренней точке этого промежутка существует и равняется $f(x)$.