Решение. По формуле трапеций площадь S поперечного сечения

$$S=\int\limits_0^{26} y\,dx \approx 2\left[\frac{1}{2}(0,3+0,6)+0,9+1,7+2,1+2,8+3,4+3,3+\right.$$

$$\left.+3,0+3,5+2,9+1,7+1,2+0,8\right]=55,5\ (м^2).$$

Отсюда секундный расход

$$Q=55,5\cdot 1,3\approx 72\ (м^3/сек).$$

Оценить погрешность точно здесь нельзя. Некоторые косвенные методы оценок, приводимые в руководствах по численным методам, позволяют указать приближенно порядок погрешности. Погрешность S составляет примерно 3 $м^2$, значит, погрешность Q составляет примерно 4 $м^3/сек$.

6.7.4. Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sin x}{x}\,dx$ с точностью до 0,001 по формуле Симпсона;

б) $\int\limits_0^1 e^{-x^2}\,dx$ с точностью до 0,001 по формуле трапеций.

6.7.5. По формуле Симпсона вычислить приближенное значение интеграла

$$I=\int\limits_{1,05}^{1,36} f(x)\,dx,$$

если подынтегральная функция задана следующей таблицей:

x	1,05	1,10	1,15	1,20	1,25	1,30	1,35
$f(x)$	2,36	2,50	2,74	3,04	3,46	3,98	4,6

§ 6.8. Дополнительные задачи

6.8.1. Дана функция

$$f(x)=\begin{cases} 1-x & \text{при } 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 0 & \text{при } 1<x\leqslant 2,\\ (2-x)^2 & \text{при } 2<x\leqslant 3.\end{cases}$$

Проверить непосредственно, что функция

$$F(x)=\int\limits_0^x f(t)\,dt$$

непрерывна в промежутке $[0, 3]$ и что ее производная в каждой внутренней точке этого промежутка существует и равняется $f(x)$.

6.8.2. Показать, что функция

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x\ln x}{1-x} & \text{при } 0<x<1, \\ 0 & \text{при } x=0, \\ -1 & \text{при } x=1 \end{cases}$$

интегрируема на отрезке $[0, 1]$.

6.8.3. Можно ли утверждать, что если функция абсолютно интегрируема на отрезке $[a, b]$, то она интегрируема на этом отрезке?

6.8.4. Касательная к графику функции $y=f(x)$ в точке с абсциссой $x=a$ составляет с осью абсцисс угол $\pi/3$ и в точке с абсциссой $x=b$ угол $\pi/4$. Вычислить $\int\limits_a^b f''(x)\,dx$, если $f''(x)$ — непрерывная функция.

6.8.5. Доказать, что

$$\int\limits_0^x E(x)\,dx=\frac{E(x)(E(x)-1)}{2}+E(x)[x-E(x)].$$

6.8.6. Дан интеграл $\int\limits_0^\pi \frac{dx}{1+\cos^2 x}$. Убедиться, что функции

$$F_1(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\arccos\frac{\sqrt{2}\cos x}{\sqrt{1+\cos^2 x}} \quad \text{и} \quad F_2(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}$$

являются первообразными для подынтегральной функции. Можно ли воспользоваться обеими первообразными для вычисления определенного интеграла по формуле Ньютона — Лейбница? Если нет, то указать, какой можно.

6.8.7. Найти такую первообразную для $f(x)$, которая при значении $x=x_0$ принимает заданную величину $y=y_0$ (задача Коши).

6.8.8. При каком значении ξ выполняется равенство

$$\int\limits_a^b e^{2x}\,dx=e^{2\xi}(b-a)?$$

Показать, что

$$\xi>\frac{a+b}{2}.$$

6.8.9. Исследовать функцию $F(x)$, заданную определенным интегралом $F(x)=\int\limits_0^x \sqrt{1-t^4}\,dt$.

6.8.10. Показать, что имеют место следующие неравенства:

$$0{,}692\leqslant\int\limits_0^1 x^x\,dx\leqslant 1.$$

6.8.11. С помощью неравенства $x\geqslant\sin x\geqslant\frac{2}{\pi}x$ $(0\leqslant x\leqslant\pi/2)$ показать, что $1<\int\limits_0^{\pi/2}\frac{\sin x}{x}\,dx<\frac{\pi}{2}$.

6.8.12. Используя неравенство $\sin x \geqslant x - x^3/6\ (x \geqslant 0)$ и неравенство Шварца — Буняковского, показать, что

$$1{,}096 < \int_0^{\pi/2} \sqrt{x \sin x}\, dx < 1{,}111.$$

6.8.13. Пусть на отрезке $[a,\ b]$ заданы интегрируемые функции $p_1(x)$, $p_2(x)$, $p_3(x)$, $p_4(x)$, причем функция $p_1(x)$ неотрицательна, а функции $p_2(x)$, $p_3(x)$, $p_4(x)$ удовлетворяют неравенству

$$p_3(x) \leqslant p_2(x) \leqslant p_4(x).$$

Доказать, что

$$\int_a^b p_3(x)\, p_1(x)\, dx \leqslant \int_a^b p_2(x)\, p_1(x)\, dx \leqslant \int_a^b p_4(x)\, p_1(x)\, dx.$$

6.8.14. Пусть функция $f(x)$ положительна на отрезке $[a,\ b]$. Доказать, что выражение

$$\int_a^b f(x)\, dx \cdot \int_a^b \frac{dx}{f(x)}$$

достигает наименьшего значения лишь в случае постоянства $f(x)$ на этом отрезке.

6.8.15. Доказать, что

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\, dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{t}{\sin t}\, dt.$$

6.8.16. Доказать, что одна из первообразных четной функции есть функция нечетная, а всякая первообразная нечетной функции есть функция четная.

6.8.17. Доказать, что если $f(x)$ — непрерывная периодическая функция с периодом T, то интеграл

$$I = \int_a^{a+T} f(x)\, dx$$

не зависит от a.

6.8.18. Доказать, что если $u = u(x)$, $v = v(x)$ непрерывны вместе со своими производными до n-го порядка на отрезке $[a,\ b]$, то

$$\int_a^b uv^{(n)}\, dx = \left[uv^{(n-1)} - u'v^{(n-2)} + \ldots + (-1)^{n-1} u^{(n-1)} v\right]\Big|_a^b + (-1)^n \int_a^b u^{(n)} v\, dx.$$