Глава VII

Приложения определенного интеграла

§ 7.1. Вычисление пределов сумм с помощью определенных интегралов

Часто возникает необходимость вычислить предел суммы, когда число слагаемых неограниченно возрастает. Такие пределы в некоторых случаях можно найти с помощью определенного интеграла, если данную сумму удается преобразовать так, чтобы она оказалась интегральной суммой.

Например, рассматривая точки $1/n$, $2/n$, ..., n/n как точки деления отрезка $[0, 1]$ на n равных частей длиной $\Delta x = 1/n$, для любой непрерывной функции $f(x)$ имеем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+\ldots+f\left(\frac{n}{n}\right)\right]=\int_0^1 f(x)\,dx.$$

7.1.1. Вычислить

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\left[\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\ldots+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right].$$

Решение. Числа, стоящие в скобках, представляют собой значения функции $f(x)=\sin x$ в точках

$$x_1=\pi/n;\ x_2=2\pi/n;\ \ldots;\ x_{n-1}=[(n-1)\pi]/n,$$

делящих отрезок $[0, \pi]$ на n равных частей длиной $\Delta x=\pi/n$. Поэтому, если к нашей сумме присоединить слагаемое $\sin(n\pi/n)=0$, то она будет являться интегральной для функции $f(x)=\sin x$ на отрезке $[0, \pi]$.

По определению, предел такой интегральной суммы при $n\to\infty$ есть определенный интеграл от функции $f(x)=\sin x$ от 0 до π:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\ldots+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}+\sin\frac{n\pi}{n}\right)=$$
$$=\int_0^\pi \sin x\,dx=-\cos x\Big|_0^\pi=2.$$

7.1.2. Вычислить предел

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{4n^2-1}}+\frac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}}\right).$$

Решение. Преобразуем сумму в круглых скобках следующим образом:

$$\frac{1}{\sqrt{4n^2-1}}+\frac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}}=$$
$$=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\sqrt{4-\frac{1}{n^2}}}+\frac{1}{\sqrt{4-\left(\frac{2}{n}\right)^2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{4-\left(\frac{n}{n}\right)^2}}\right).$$

Полученная сумма является интегральной суммой для функции $f(x)=$ $=1/\sqrt{4-x^2}$ на отрезке $[0, 1]$, разбитом на n равных частей. Предел такой интегральной суммы при $n\to\infty$ равен определенному интегралу от этой функции в пределах от 0 до 1:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{4n^2-1}}+\frac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}}\right)=$$
$$=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}=\arcsin\frac{x}{2}\Big|_0^1=\frac{\pi}{6}.$$

7.1.3. Вычислить

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}\left[1+\sqrt{\frac{n}{n+3}}+\sqrt{\frac{n}{n+6}}+\sqrt{\frac{n}{n+9}}+\ldots+\sqrt{\frac{n}{n+3(n-1)}}\right].$$

Решение. Преобразуем данное выражение следующим образом:

$$\frac{3}{n}\left[1+\sqrt{\frac{n}{n+3}}+\sqrt{\frac{n}{n+6}}+\ldots+\sqrt{\frac{n}{n+3(n-1)}}\right]=$$
$$=\frac{3}{n}\left[\sqrt{\frac{1}{1+0}}+\sqrt{\frac{1}{1+3/n}}+\sqrt{\frac{1}{1+6/n}}+\ldots+\sqrt{\frac{1}{1+3(n-1)/n}}\right].$$

Полученная сумма является интегральной суммой, составленной для функции $f(x)=\sqrt{1/(1+x)}$ на отрезке $[0, 3]$; поэтому, по определению,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}\left(1+\sqrt{\frac{n}{n+3}}+\sqrt{\frac{n}{n+6}}+\ldots+\sqrt{\frac{n}{n+3(n-1)}}\right)=$$
$$=\int_0^3\sqrt{\frac{1}{1+x}}\,dx=\int_0^3(1+x)^{-1/2}\,dx=2\sqrt{1+x}\Big|_0^3=4-2=2.$$

7.1.4. Пользуясь определенным интегралом, вычислить следующие пределы:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+n}\right)$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\ldots+\sqrt{1+\frac{n}{n}}\right)$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}+\ldots+\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n^4}}$;

г) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\pi}{2n}\left(1+\cos\dfrac{\pi}{2n}+\cos\dfrac{2\pi}{2n}+\ldots+\cos\dfrac{(n-1)\pi}{2n}\right)$;

д) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[\dfrac{1}{(n+1)^2}+\dfrac{1}{(n+2)^2}+\ldots+\dfrac{1}{(2n)^2}\right]$.

7.1.5. Вычислить предел $A=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.

Решение. Прологарифмируем

$$\ln A=\lim_{n\to\infty}\ln\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\ln\frac{1}{n}+\ln\frac{2}{n}+\ldots+\ln\frac{n}{n}\right].$$

Выражение под знаком предела есть интегральная сумма для интеграла

$$\int_0^1 \ln x\,dx=(x\ln x-x)\Big|_0^1=-1.$$

Следовательно, $\ln A=-1$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}=e^{-1}$.

§ 7.2. Вычисление средних значений функции

Средним значением μ функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ называется число

$$\mu=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Корень квадратный из среднего значения квадрата функции $\left\{\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b [f(x)]^2\,dx\right\}^{1/2}$ называется *средним квадратичным значением функции* $f(x)$ на $[a, b]$.

7.2.1. Найти среднее значение μ функции $f(x)=\sqrt[3]{x}$ на отрезке $[0, 1]$.

Решение. В нашем случае

$$\mu=\frac{1}{1-0}\int_0^1 \sqrt[3]{x}\,dx=\frac{3x^{4/3}}{4}\Big|_0^1=\frac{3}{4}.$$

7.2.2. Найти среднее значение μ функций:

а) $f(x)=\sin^2 x$ на отрезке $[0, 2\pi]$;

б) $f(x)=1/(e^x+1)$ на отрезке $[0, 2]$.