в) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}+\ldots+\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n^4}}$;

г) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\pi}{2n}\left(1+\cos\dfrac{\pi}{2n}+\cos\dfrac{2\pi}{2n}+\ldots+\cos\dfrac{(n-1)\pi}{2n}\right)$;

д) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[\dfrac{1}{(n+1)^2}+\dfrac{1}{(n+2)^2}+\ldots+\dfrac{1}{(2n)^2}\right]$.

7.1.5. Вычислить предел $A=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.

Решение. Прологарифмируем

$$\ln A=\lim_{n\to\infty}\ln\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\ln\frac{1}{n}+\ln\frac{2}{n}+\ldots+\ln\frac{n}{n}\right].$$

Выражение под знаком предела есть интегральная сумма для интеграла

$$\int_0^1 \ln x\,dx=(x\ln x-x)\Big|_0^1=-1.$$

Следовательно, $\ln A=-1$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}=e^{-1}$.

§ 7.2. Вычисление средних значений функции

Средним значением μ функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ называется число

$$\mu=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Корень квадратный из среднего значения квадрата функции $\left\{\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b [f(x)]^2\,dx\right\}^{1/2}$ называется *средним квадратичным значением функции* $f(x)$ на $[a, b]$.

7.2.1. Найти среднее значение μ функции $f(x)=\sqrt[3]{x}$ на отрезке $[0, 1]$.

Решение. В нашем случае

$$\mu=\frac{1}{1-0}\int_0^1\sqrt[3]{x}\,dx=\frac{3x^{4/3}}{4}\Big|_0^1=\frac{3}{4}.$$

7.2.2. Найти среднее значение μ функций:

а) $f(x)=\sin^2 x$ на отрезке $[0, 2\pi]$;

б) $f(x)=1/(e^x+1)$ на отрезке $[0, 2]$.

7.2.3. Определить среднюю длину всех вертикальных хорд гиперболы $x^2/a^2-y^2/b^2=1$ на отрезке $a\leqslant x\leqslant 2a$.

Решение. Задача состоит в отыскании среднего значения функции $f(x)=2y=2\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$ на отрезке $[a, 2a]$:

$$\mu=2\frac{1}{a}\int_a^{2a}\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}\,dx=$$

$$=\frac{2b}{a^2}\left[\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)\right]_a^{2a}=$$

$$=b\left[2\sqrt{3}-\ln\left(2+\sqrt{3}\right)\right].$$

7.2.4. Найти среднюю ординату синусоиды $y=\sin x$ на отрезке $[0, \pi]$.

Решение.

$$\mu=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\,dx=-\frac{1}{\pi}\cos x\Big|_0^{\pi}=\frac{2}{\pi}\approx 0{,}637.$$

Перепишем полученный результат следующим образом:

$$\mu\cdot\pi=\frac{2}{\pi}\cdot\pi=\int_0^{\pi}\sin x\,dx.$$

Используя геометрический смысл определенного интеграла, мы можем сказать, что площадь прямоугольника с высотой $\mu=2/\pi$ и основанием π равна площади фигуры, ограниченной полуволной синусоиды $y=\sin x$, $0\leqslant x\leqslant\pi$ и осью Ox.

7.2.5. Определить среднюю длину всех положительных ординат окружности $x^2+y^2=1$.

7.2.6. Показать, что среднее значение функции $f(x)$, непрерывной на отрезке $[a, b]$, есть предел среднего арифметического значений этой функции, взятых через равные промежутки аргумента x.

Решение. Отрезок $[a, b]$ разделим на n равных частей точками $x_i=a+i(b-a)/n$ $(i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$.

Составим среднее арифметическое значений функции $f(x)$ в n точках деления $x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_{n-1}$:

$$\mu_n=\frac{f(x_0)+f(x_1)+\ldots+f(x_{n-1})}{n}=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}f(x_i).$$

Это среднее можно представить в таком виде:

$$\mu_n=\frac{1}{b-a}\sum_{i=0}^{n-1}f(x_i)\,\Delta x_i,$$

где

$$\Delta x_i = \frac{b-a}{n}.$$

Последняя сумма есть интегральная сумма для функции $f(x)$, поэтому

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n = \frac{1}{b-a} \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\,\Delta x_i = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \mu,$$

что и требовалось доказать.

7.2.7. Найти среднее значение давления p_m при изменении p от 2 до 10 *атм*, если давление p и объем v связаны соотношением

$$pv^{3/2} = 160.$$

Решение. При изменении p от 2 до 10 *атм* v пробегает отрезок $\left[4\sqrt[3]{4},\ 4\sqrt[3]{100}\right]$; отсюда

$$p_m = \frac{1}{4\left(\sqrt[3]{100}-\sqrt[3]{4}\right)} \int\limits_{4\sqrt[3]{4}}^{4\sqrt[3]{100}} 160 v^{-3/2}\,dv =$$

$$= -\frac{320}{4\left(\sqrt[3]{100}-\sqrt[3]{4}\right)} v^{-1/2}\Bigg|_{4\sqrt[3]{4}}^{4\sqrt[3]{100}} = \frac{40}{\sqrt[3]{20}\left(\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{2}\right)} \approx 4{,}32 \text{ атм}.$$

7.2.8. В гидравлике существует формула Базена, выражающая скорость v течения воды в широком прямоугольном канале в зависимости от глубины h рассматриваемой точки под свободной поверхностью, $v = v_0 - 20\sqrt{HL}\,(h/H)^2$, где v_0 — скорость на свободной поверхности, H — глубина канала, L — его уклон.

Определить среднюю скорость v_m течения в поперечном сечении канала.

Решение. Имеем

$$v_m = \frac{1}{H}\int_0^H \left[v_0 - 20\sqrt{HL}\left(\frac{h}{H}\right)^2\right] dh = v_0 - \frac{20}{3}\sqrt{HL}.$$

7.2.9. Определить среднюю величину электродвижущей силы E_m за один период, т. е. за время от $t=0$ до $t=T$, если электродвижущая сила вычисляется по формуле

$$E = E_0 \sin\frac{2\pi t}{T},$$

где T — продолжительность периода в секундах, E_0 — амплитуда (максимальное значение) электродвижущей силы, соответствующая значению $t = 0{,}25T$. Дробь $2\pi t/T$ называется *фазой*.

Решение.

$$E_m = \frac{E_0}{T}\int_0^T \sin\frac{2\pi t}{T}\,dt = \frac{E_0 T}{T\cdot 2\pi}\left[-\cos\frac{2\pi t}{T}\right]_0^T = 0.$$

Таким образом, среднее значение электродвижущей силы в течение одного периода равно нулю.

7.2.10. На двух вертикальных столбах OA и CD укреплены на высоте h электрические фонари; сила света каждого из них i свечей. Расстояние между столбами равно d. Найти среднюю освещенность прямой OC, соединяющей основания столбов.

7.2.11. Найти среднее значение квадрата электродвижущей силы $(E^2)_m$ в интервале от $t=0$ до $t=T/2$ (см. **7.2.9**).

Решение. Так как

$$E = E_0 \sin\frac{2\pi t}{T},$$

то

$$(E^2)_m = \frac{2}{T}E_0^2\int_0^{T/2}\sin^2\frac{2\pi t}{T}\,dt = \frac{2}{T}E_0^2\int_0^{T/2}\frac{1-\cos(4\pi t/T)}{2}\,dt =$$

$$= \frac{E_0^2}{T}\left[t - \frac{T}{4\pi}\sin\frac{4\pi t}{T}\right]_0^{T/2} = \frac{E_0^2}{2}.$$

7.2.12. Если функция $f(x)$ задана на бесконечном интервале $[0, \infty)$, то ее средним значением μ называется

$$\mu = \lim_{b\to\infty}\frac{1}{b}\int_0^b f(x)\,dx,$$

если этот предел существует. Найти среднюю потребляемую мощность в цепи переменного тока, если сила тока I и напряжение u выражаются следующими формулами:

$$I = I_0\cos(\omega t + \alpha);$$
$$u = u_0\cos(\omega t + \alpha + \varphi),$$

где φ — постоянный сдвиг фазы напряжения по сравнению с силой тока (параметры ω и α в среднюю мощность не войдут).

Решение. Средняя потребляемая мощность

$$w_{\text{ср}} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T I_0\cos(\omega t+\alpha)\,u_0\cos(\omega t+\alpha+\varphi)\,dt.$$

Учитывая, что

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)],$$

получим

$$w_{\text{ср}}=\lim_{T\to\infty}\frac{I_0u_0}{2T}\int_0^T[\cos(2\omega t+2\alpha+\varphi)+\cos\varphi]\,dt=$$

$$=\lim_{T\to\infty}\left\{\frac{I_0u_0}{4\omega}\cdot\frac{\sin(2\omega T+2\alpha+\varphi)-\sin(2\alpha+\varphi)}{T}+\frac{I_0u_0}{2}\cos\varphi\right\}=\frac{I_0u_0}{2}\cos\varphi.$$

Отсюда понятно, почему в электротехнике придается такое важное значение величине $\cos\varphi$.

7.2.13. Найти среднее значение μ функций $f(x)$ на указанных отрезках:

а) $f(x)=2x^2+1$ на отрезке $[0, 1]$;

б) $f(x)=1/x$ на отрезке $[1, 2]$;

в) $f(x)=3^x-2x+3$ на отрезке $[0, 2]$.

7.2.14. Тело, падающее на землю из состояния покоя, пройдя вертикальный отрезок $s=s_1$, приобретает скорость $v_1=\sqrt{2gs_1}$. Показать, что на этом пути средняя скорость $v_{\text{ср}}$ равна $2v_1/3$.

7.2.15. Сечение желоба имеет форму параболического сегмента. Основание его a, глубина h. Определить среднюю глубину желоба.

7.2.16. Найти среднее значение I_m силы переменного тока за промежуток времени от 0 до π/ω (см. **7.2.12**).

7.2.17. Доказать, что среднее значение фокального радиуса эллипса $\rho=p/(1-\varepsilon\cos\varphi)$, где $p=b^2/a$, a, b — полуоси и ε — эксцентриситет, равняется b.

7.2.18. На отрезке AB, имеющем длину a, взята на расстоянии x от конца A точка P. Показать, что среднее значение площадей прямоугольников, построенных на отрезках AP и PB как на сторонах, равно $a^2/6$.

7.2.19. Вычислить среднее значение функции

$$f(x)=\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x+4\cos^2 x}$$

в промежутке $[0, \pi/2]$. Проверить непосредственно, что это среднее значение, равное $1/6$, является значением функции $f(x)$ для некоторого $x=\xi$ из этого интервала.

§ 7.3. Вычисление площадей в декартовых координатах

Если плоская фигура ограничена прямыми $x=a$, $x=b$ $(a<b)$ и кривыми

$$y=y_1(x),\ y=y_2(x),\ \text{причем}\ y_1(x)\leqslant y_2(x)\ (a\leqslant x\leqslant b),$$

о ее площадь вычисляется по формуле

$$S=\int_a^b[y_2(x)-y_1(x)]\,dx.$$

В отдельных случаях левая граница $x=a$ (или правая граница $x=b$) может выродиться в точку пересечения кривых $y=y_1(x)$ и $y=y_2(x)$. В этих случаях