получим

$$w_{\text{ср}} = \lim_{T\to\infty} \frac{I_0 u_0}{2T} \int_0^T [\cos(2\omega t + 2\alpha + \varphi) + \cos\varphi]\, dt =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \left\{ \frac{I_0 u_0}{4\omega} \cdot \frac{\sin(2\omega T + 2\alpha + \varphi) - \sin(2\alpha + \varphi)}{T} + \frac{I_0 u_0}{2} \cos\varphi \right\} = \frac{I_0 u_0}{2} \cos\varphi.$$

Отсюда понятно, почему в электротехнике придается такое важное значение величине $\cos\varphi$.

7.2.13. Найти среднее значение μ функций $f(x)$ на указанных отрезках:

а) $f(x) = 2x^2 + 1$ на отрезке $[0, 1]$;

б) $f(x) = 1/x$ на отрезке $[1, 2]$;

в) $f(x) = 3^x - 2x + 3$ на отрезке $[0, 2]$.

7.2.14. Тело, падающее на землю из состояния покоя, пройдя вертикальный отрезок $s = s_1$, приобретает скорость $v_1 = \sqrt{2gs_1}$. Показать, что на этом пути средняя скорость $v_{\text{ср}}$ равна $2v_1/3$.

7.2.15. Сечение желоба имеет форму параболического сегмента. Основание его a, глубина h. Определить среднюю глубину желоба.

7.2.16. Найти среднее значение I_m силы переменного тока за промежуток времени от 0 до π/ω (см. **7.2.12**).

7.2.17. Доказать, что среднее значение фокального радиуса эллипса $\rho = p/(1 - \varepsilon\cos\varphi)$, где $p = b^2/a$, a, b — полуоси и ε — эксцентриситет, равняется b.

7.2.18. На отрезке AB, имеющем длину a, взята на расстоянии x от конца A точка P. Показать, что среднее значение площадей прямоугольников, построенных на отрезках AP и PB как на сторонах, равно $a^2/6$.

7.2.19. Вычислить среднее значение функции

$$f(x) = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x + 4\cos^2 x}$$

в промежутке $[0, \pi/2]$. Проверить непосредственно, что это среднее значение, равное $1/6$, является значением функции $f(x)$ для некоторого $x = \xi$ из этого интервала.

§ 7.3. Вычисление площадей в декартовых координатах

Если плоская фигура ограничена прямыми $x = a$, $x = b$ $(a < b)$ и кривыми

$$y = y_1(x),\quad y = y_2(x),\quad \text{причем } y_1(x) \leqslant y_2(x) \quad (a \leqslant x \leqslant b),$$

о ее площадь вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b [y_2(x) - y_1(x)]\, dx.$$

В отдельных случаях левая граница $x = a$ (или правая граница $x = b$) может выродиться в точку пересечения кривых $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$. В этих случаях величины a и b отыскиваются как абсциссы точек пересечения указанных кривых (рис. 65, *а*, *б*).

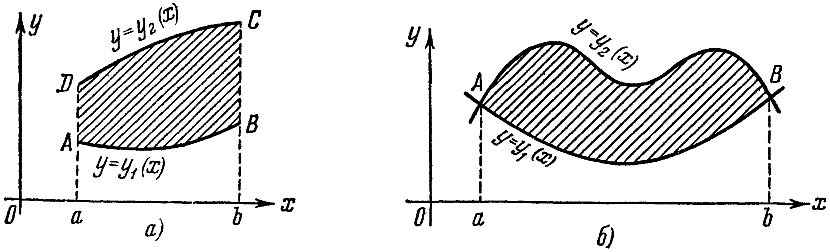

Рис. 65.

7.3.1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной прямыми $x=0$, $x=2$ и кривыми $y=2^x$, $y=2x-x^2$ (рис. 66).

Решение. Так как максимум функции $y=2x-x^2$ достигается в точке $x=1$ и равен 1, а функция $y=2^x \geqslant 1$ на отрезке $[0, 2]$, то

$$S=\int_0^2 [2^x-(2x-x^2)]\,dx=\frac{2^x}{\ln 2}\Big|_0^2-\left(x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^2=\frac{3}{\ln 2}-\frac{4}{3}.$$

7.3.2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболами $x=-2y^2$, $x=1-3y^2$ (рис. 67).

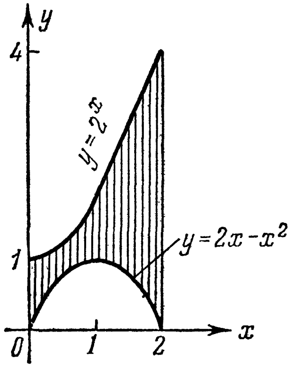

Рис. 66.

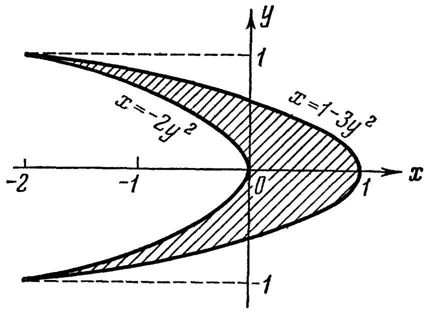

Рис. 67.

Решение. Решая систему уравнений

$$\begin{cases} x=-2y^2, \\ x=1-3y^2, \end{cases}$$

найдем ординаты точек пересечения кривых $y_1=-1$, $y_2=1$. Так как $1-3y^2 \geqslant -2y^2$ при $-1 \leqslant y \leqslant 1$, то

$$S=\int_{-1}^{1} [(1-3y^2)-(-2y^2)]\,dy=2\left(y-\frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^1=\frac{4}{3}.$$

7.3.3. Найти площадь фигуры, заключенной между параболой $x^2=4y$ и локоном Аньези (рис. 68): $y=8/(x^2+4)$.

Решение. Найдем абсциссы точек A и C пересечения кривых. Для этого исключим y из системы уравнений:

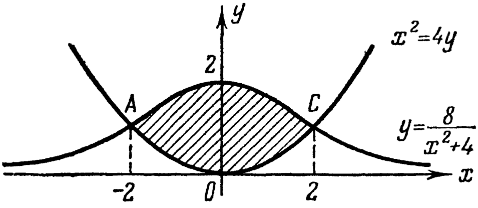

Рис. 68.

$$\begin{cases} y=8/(x^2+4), \\ y=x^2/4, \end{cases}$$

откуда $8/(x^2+4)=x^2/4$ или $x^4+4x^2-32=0$.

Действительными корнями этого уравнения являются точки $x_1=-2$ и $x_2=2$. Из рисунка видно, что $8/(x^2+4) \geqslant x^2/4$ на отрезке $[-2, 2]$. (В этом можно убедиться и прямым подсчетом значений этих функций в любой точке внутри отрезка, например, в точке $x=0$.)

Следовательно,

$$S=\int_{-2}^{2}\left(\frac{8}{x^2+4}-\frac{x^2}{4}\right)dx=\left(4\operatorname{arctg}\frac{x}{2}-\frac{x^3}{12}\right)\Bigg|_{-2}^{2}=2\pi-\frac{4}{3}.$$

7.3.4. Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y=x^2+1$ и прямой $x+y=3$.

7.3.5. Вычислить площадь фигуры, лежащей в первой четверти внутри круга $x^2+y^2=3a^2$ и ограниченной параболами $x^2=2ay$ и $y^2=2ax$ $(a>0)$ (рис. 69).

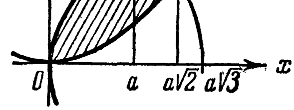

Рис. 69.

Решение. Найдем абсциссу точки A пересечения параболы $y^2=2ax$ с окружностью $x^2+y^2=3a^2$. Исключив y из системы уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2=3a^2, \\ y^2=2ax, \end{cases}$$

получим $x^2+2ax-3a^2=0$, откуда находим единственный положительный корень $x_A=a$. Аналогично находим абсциссу точки D пересечения окружности $x^2+y^2=3a^2$ и параболы $x^2=2ay$; $x_D=a\sqrt{2}$.

Таким образом, интересующая нас площадь равна

$$S=\int_{0}^{a\sqrt{2}}[y_2(x)-y_1(x)]\,dx,$$

где $y_1(x)=\frac{x^2}{2a}$, $y_2(x)=\begin{cases}\sqrt{2ax} & \text{при} \quad 0\leqslant x\leqslant a, \\ \sqrt{3a^2-x^2} & \text{при} \quad a<x\leqslant a\sqrt{2}.\end{cases}$

По свойству аддитивности интеграла

$$S=\int_0^a\left(\sqrt{2ax}-\frac{x^2}{2a}\right)dx+\int_a^{a\sqrt{2}}\left(\sqrt{3a^2-x^2}-\frac{x^2}{2a}\right)dx=$$

$$=\left[\sqrt{2a}\cdot\frac{2}{3}x^{3/2}-\frac{x^3}{6a}\right]_0^a+\left[\frac{x}{2}\sqrt{3a^2-x^2}+\frac{3a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a\sqrt{3}}-\frac{x^3}{6a}\right]_a^{a\sqrt{2}}=$$

$$=\frac{2\sqrt{2}}{3}a^2-\frac{a^2}{6}+\frac{3a^2}{2}\left(\arcsin\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}-\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}\right)-\frac{\sqrt{2}}{3}a^2+\frac{1}{6}a^2=$$

$$=\left(\frac{\sqrt{2}}{3}+\frac{3}{2}\arcsin\frac{1}{3}\right)a^2.$$

Здесь мы воспользовались известной формулой тригонометрии

$$\arcsin\alpha-\arcsin\beta=\arcsin\left(\alpha\sqrt{1-\beta^2}-\beta\sqrt{1-\alpha^2}\right)\qquad(\alpha\beta>0)$$

для преобразования

$$\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}-\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}=\arcsin\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{\frac{2}{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=$$

$$=\arcsin\frac{1}{3}.$$

7.3.6. Вычислить площадь фигуры, лежащей в первом квадранте, ограниченной кривыми $y^2=4x$, $x^2=4y$ и $x^2+y^2=5$.

7.3.7. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x+1$, $y=\cos x$ и осью Ox (рис. 70).

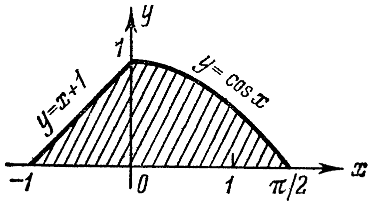

Рис. 70.

Р е ш е н и е. Функция

$$y=f(x)=\begin{cases}x+1, & \text{если } -1\leqslant x\leqslant 0,\\ \cos x, & \text{если } 0\leqslant x\leqslant \pi/2\end{cases}$$

непрерывна на промежутке $[-1, \pi/2]$. Площадь криволинейной трапеции равна

$$S=\int_{-1}^{\pi/2}f(x)\,dx=$$

$$=\int_{-1}^{0}(x+1)\,dx+\int_0^{\pi/2}\cos x\,dx=\left.\frac{(x+1)^2}{2}\right|_{-1}^{0}+\sin x\Big|_0^{\pi/2}=\frac{3}{2}.$$

7.3.8. Найти площадь сегмента, отсекаемого от кривой $y^2=x^3-x^2$ хордой $x=2$.

Р е ш е н и е. Из равенства $y^2=x^2(x-1)$ следует, что $x^2(x-1)\geqslant 0$, поэтому или $x=0$ или $x\geqslant 1$. Другими словами, область определения неявно заданной функции $y^2=x^3-x^2$ состоит из точки $x=0$ и промежутка $[1, \infty)$. Изолированная точка $(0, 0)$ при вычислении площади роли не играет, поэтому промежуток интегрирования — это отрезок [1, 2] (рис. 71).

Переходя к явному заданию $y=\pm x\sqrt{x-1}$, мы видим, что сегмент ограничен сверху кривой $y=x\sqrt{x-1}$ и снизу — кривой $y=-x\sqrt{x-1}$. Следовательно,

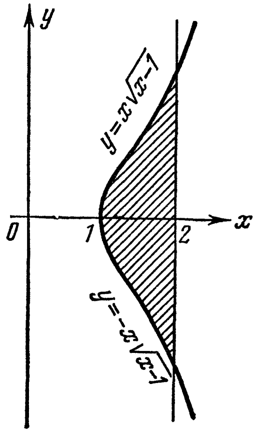

Рис. 71.

$$S=\int_1^2\left[x\sqrt{x-1}-(-x\sqrt{x-1})\right]dx=$$

$$=2\int_1^2 x\sqrt{x-1}\,dx.$$

Сделаем подстановку

$$x-1=t^2,\quad dx=2t\,dt,$$

x	t
1	0
2	1

.

Тогда

$$S=4\int_0^1(t^2+1)\,t^2\,dt=4\left[\frac{t^5}{5}+\frac{t^3}{3}\right]_0^1=\frac{32}{15}.$$

7.3.9. Найти площадь фигуры, ограниченной двумя ветвями кривой $(y-x)^2=x^3$ и прямой $x=1$.

Решение. Заметим прежде всего, что y как неявная функция от x определена лишь при $x\geqslant 0$: левая часть уравнения всегда неотрицательна. Теперь находим уравнения двух ветвей кривой $y=x-x\sqrt{x}$, $y=x+x\sqrt{x}$. Так как $x\geqslant 0$, то $x+x\sqrt{x}\geqslant x-x\sqrt{x}$ и поэтому

$$S=\int_0^1(x+x\sqrt{x}-x+x\sqrt{x})\,dx=2\int_0^1 x\sqrt{x}\,dx=\frac{4}{5}x^{5/2}\Big|_0^1=\frac{4}{5}.$$

Сто́ит отметить, что при вычислении площади мы обошлись без рисунка, хотя при исследовании поведения функции $y(x)$ он был бы полезен.

7.3.10. Вычислить площадь петли кривой $y^2=x(x-1)^2$.

Решение. Область определения неявной функции y есть промежуток $0\leqslant x<+\infty$. Так как в уравнение кривой y входит во второй степени, то кривая симметрична относительно оси Ox. Положительная ветвь $y_1(x)$ задается уравнением

$$y=y_1(x)=\sqrt{x}\,|x-1|=\begin{cases}\sqrt{x}\,(1-x), & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ \sqrt{x}\,(x-1), & x>1.\end{cases}$$

Общие точки симметричных ветвей $y_1(x)$ и $y_2(x) = -y_1(x)$ должны лежать на оси Ox. Но $y_1(x) = \sqrt{x}\,|x-1| = 0$ лишь при $x_1 = 0$ и при $x_2 = 1$.

Следовательно, петля кривой образована кривыми $y = \sqrt{x}(1-x)$ и $y = -\sqrt{x}(1-x)$, $0 \leqslant x \leqslant 1$ (рис. 72). Поэтому площадь петли равна

$$S = 2\int_0^1 \sqrt{x}(1-x)\,dx = 2\int_0^1 (x^{1/2} - x^{3/2})\,dx = \frac{8}{15}.$$

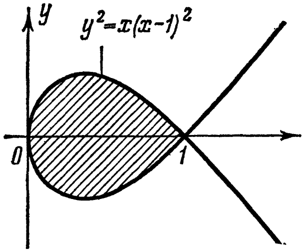

Рис. 72.

7.3.11. Найти площадь фигуры, ограниченной завитком кривой

$$y^2 = (x-1)(x-2)^2.$$

7.3.12. Найти площадь между параболой $y = -x^2 - 2x + 3$, касательной к ней в точке $M(2, -5)$ и осью ординат.

Решение. Уравнение касательной в точке $M(2, -5)$ имеет вид $y + 5 = -6(x-2)$ или $y = 7 - 6x$. Поскольку ветви параболы направлены вниз, то парабола лежит под касательной, т. е. $7 - 6x \geqslant -x^2 - 2x + 3$ на отрезке $[0, 2]$ (рис. 73).

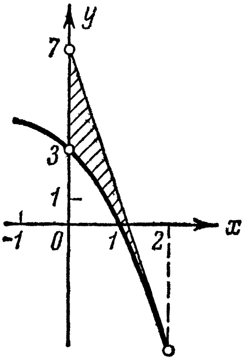

Рис. 73.

Следовательно,

$$S = \int_0^2 [7 - 6x - (-x^2 - 2x + 3)]\,dx = \int_0^2 (x^2 - 4x + 4)\,dx = \frac{8}{3}.$$

7.3.13. Найти площадь, заключенную между параболой $y = x^2 - 2x + 2$, касательной к ней в точке $M(3, 5)$ и осью ординат.

7.3.14. На эллипсе

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1 \quad (a > b)$$

взята точка $M(x, y)$, лежащая в первой четверти.

Показать, что сектор эллипса, ограниченный его большой полуосью и фокальным радиусом, проведенным в точку M, имеет площадь

$$S = \frac{ab}{2}\arccos\frac{x}{a}.$$

С помощью этого результата получить формулу для площади всего эллипса.

Решение. Имеем (рис. 74):

$$S_{OMAO}=S_{\triangle OMB}+S_{MABM};\quad S_{\triangle OMB}=\frac{xy}{2}=\frac{b}{2a}x\sqrt{a^2-x^2};$$

$$S_{MABM}=\int_x^a y\,dx=\int_x^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2-t^2}\,dt=\frac{b}{2a}\left(t\sqrt{a^2-t^2}+a^2\arcsin\frac{t}{a}\right)\Big|_x^a=$$
$$=\frac{b}{2a}\left[-x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{x}{a}\right)\right].$$

Так как $\pi/2-\arcsin(x/a)=\arccos(x/a)$, то получаем

$$S_{MABM}=\frac{b}{2a}\left[-x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\arccos\frac{x}{a}\right].$$

Отсюда

$$S_{OMAO}=S_{\triangle OMB}+S_{MABM}=\frac{ab}{2}\arccos\frac{x}{a},$$

что и требовалось доказать.

При $x=0$ сектор превратится в четверть эллипса, т. е.

$$\frac{1}{4}S_{\text{эллипса}}=\frac{ab}{2}\arccos 0=\frac{ab}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{ab}{4}\pi,$$

а следовательно, $S_{\text{эллипса}}=\pi ab$. При $a=b$ получим площадь круга $S_{\text{круга}}=\pi a^2$.

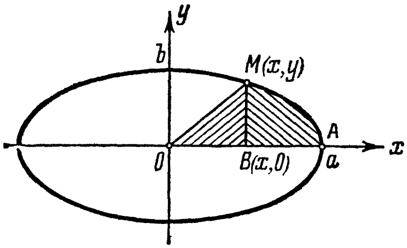

Рис. 74.

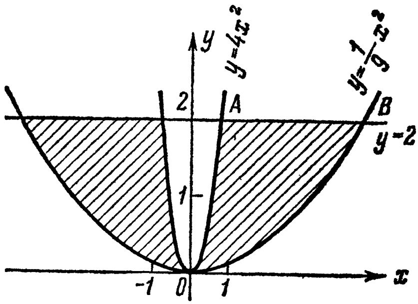

Рис. 75.

7.3.15. Найти площадь фигуры, заключенной между параболами $y=4x^2$, $y=x^2/9$ и прямой $y=2$.

Решение. В данном случае целесообразнее интегрировать по переменной y и воспользоваться симметрией фигуры (рис. 75). Поэтому уравнения парабол разрешаем относительно x:

$$x=\pm\sqrt{y}/2,\quad x=\pm 3\sqrt{y}.$$

В силу симметрии фигуры относительно оси Oy искомая площадь равна удвоенной площади S_{OABO}:

$$S=2S_{OABO}=2\int_0^2\left(3\sqrt{y}-\frac{1}{2}\sqrt{y}\right)dy=5\int_0^2\sqrt{y}\,dy=\frac{20\sqrt{2}}{3}.$$

7.3.16. Из произвольной точки $M(x, y)$ кривой $y=x^m$ $(m>0)$ опущены на оси перпендикуляры MN и ML $(x>0)$. Какую часть площади прямоугольника $ONML$ составляет площадь $ONMO$ (рис. 76)?

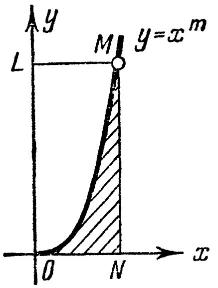

Рис. 76.

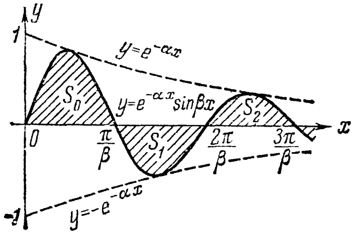

Рис. 77.

7.3.17. Доказать, что площади S_0, S_1, S_2, S_3, ..., ограниченные осью Ox и полуволнами кривой $y=e^{-\alpha x}\sin\beta x$, $x\geqslant 0$, образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $q=e^{-\alpha\pi/\beta}$.

Решение. Кривая (рис. 77) пересекает положительную полуось Ox в точках, в которых $\sin\beta x=0$, откуда

$$x_n=\frac{n\pi}{\beta}, \qquad n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

Функция $y=e^{-\alpha x}\sin\beta x$ положительна в интервалах (x_{2k}, x_{2k+1}) и отрицательна в интервалах (x_{2k+1}, x_{2k+2}), т. е. знак функции в интервале (x_n, x_{n+1}) совпадает со знаком числа $(-1)^n$. Поэтому

$$S_n=\int\limits_{n\pi/\beta}^{(n+1)\pi/\beta}|y|\,dx=(-1)^n\int\limits_{n\pi/\beta}^{(n+1)\pi/\beta}e^{-\alpha x}\sin\beta x\,dx.$$

Но неопределенный интеграл равен

$$\int e^{-\alpha x}\sin\beta x\,dx=-\frac{e^{-\alpha x}}{\alpha^2+\beta^2}(\alpha\sin\beta x+\beta\cos\beta x)+C.$$

Следовательно,

$$S_n=(-1)^{n+1}\left[\frac{e^{-\alpha x}}{\alpha^2+\beta^2}(\alpha\sin\beta x+\beta\cos\beta x)\right]\Bigg|_{n\pi/\beta}^{(n+1)\pi/\beta}=$$

$$=\frac{(-1)^{n+1}}{\alpha^2+\beta^2}\left[e^{-\alpha(n+1)\pi/\beta}\beta(-1)^{n+1}-e^{\alpha n\pi/\beta}\beta(-1)^n\right]=$$

$$=\frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}e^{-\alpha n\pi/\beta}\left(1+e^{-\alpha\pi/\beta}\right).$$

Отсюда

$$q=\frac{S_{n+1}}{S_n}=\frac{e^{-\alpha(n+1)\pi/\beta}}{e^{-\alpha n\pi/\beta}}=e^{-\alpha\pi/\beta},$$

что и требовалось доказать.

7.3.18. Найти площади фигур, ограниченных окружностью $x^2+y^2-2x+4y-11=0$ и параболой $y=-x^2+2x+1-2\sqrt{3}$.

Решение. Перепишем уравнения данных кривых в виде

$$(x-1)^2+(y+2)^2=16, \quad y=-(x-1)^2-2\sqrt{3}+2.$$

Следовательно, центр окружности лежит в точке $C(1, -2)$ и радиус окружности равен 4, а ось параболы совпадает с прямой $x=1$ и вершина параболы лежит в точке $B(1,\ 2-2\sqrt{3})$ (рис. 78).

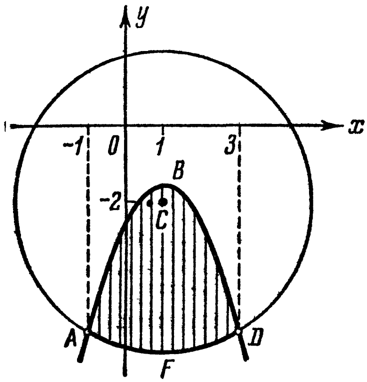

Рис. 78.

Площадь S_{ABDFA} меньшей фигуры находим по формуле

$$S_{ABDFA}=\int_{x_A}^{x_D}(y_{\text{пар}}-y_{\text{окр}})\,dx,$$

где x_A и x_D определяются из системы уравнений

$$\begin{cases}(x-1)^2+(y+2)^2=16,\\ y+2=-(x-1)^2-2\sqrt{3}+4,\end{cases}$$

откуда $x_A=-1$, $x_D=3$.

Следовательно,

$$S_{ABDFA}=\int_{-1}^{3}\left[\left(-x^2+2x+1-2\sqrt{3}\right)+\left(2+\sqrt{16-(x-1)^2}\right)\right]dx=$$

$$=\left[-\frac{x^3}{3}+x^2+(3-2\sqrt{3})x+\frac{x-1}{2}\sqrt{16-(x-1)^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{16}{2}\arcsin\frac{x-1}{4}\right]_{1}^{3}=\frac{32}{3}-8\sqrt{3}+2\sqrt{12}+16\arcsin\frac{1}{2}=$$

$$=\frac{32}{3}-4\sqrt{3}+\frac{8}{3}\pi.$$

Площадь второй фигуры определить легко.

Замечание. Вычисления интеграла можно упростить сдвигом $x-1=z$ и использованием четности подынтегральной функции.

7.3.19. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=(x-4)^2$, $y=16-x^2$ и осью Ox.

7.3.20. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболами

$$x=y^2; \qquad x=\frac{3}{4}y^2+1.$$

7.3.21. Вычислить площадь частей эллипса $x^2+4y^2=8$, отсеченных гиперболой $x^2-3y^2=1$.

7.3.22. Вычислить площадь фигуры, ограниченной замкнутой кривой $y^2=(1-x^2)^3$.

7.3.23. Вычислить площадь петли кривой $4(y^2-x^2)+x^3=0$.

7.3.24. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ и прямой $x+y=1$.

7.3.25. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $y^2=x^2(1-x^2)$.

7.3.26. Вычислить площадь фигуры, ограниченной петлей кривой

$$x^3+x^2-y^2=0.$$

7.3.27. Вычислить площадь фигуры, ограниченной осью ординат и кривой $x=y^2(1-y)$.

7.3.28. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $y=x^4-2x^3+x^2+3$, осью абсцисс и двумя ординатами, соответствующими точкам, в которых функция $y(x)$ имеет минимум.

§ 7.4. Вычисление площадей фигур при параметрическом задании границы (контура)

Если граница фигуры задана параметрическими уравнениями

$$x=x(t), \qquad y=y(t),$$

то площадь фигуры вычисляется по одной из трех формул:

$$S=-\int_{\alpha}^{\beta} y(t)\,x'(t)\,dt; \qquad S=\int_{\alpha}^{\beta} x(t)\,y'(t)\,dt; \qquad S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}(xy'-yx')\,dt,$$

где α и β — значения параметра t, соответствующие началу и концу обхода контура в положительном направлении (при котором фигура остается слева).

7.4.1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной эллипсом

$$x=a\cos t, \qquad y=b\sin t \qquad (0\leqslant t\leqslant 2\pi).$$

Решение. Здесь удобно вычислить сначала

$$xy'-yx'=a\cos t\cdot b\cos t+b\sin t\cdot a\sin t=ab.$$

Отсюда

$$S=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(xy'-yx')\,dt=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}ab\,dt=\pi ab.$$

7.4.2. Найти площадь астроиды $(x/a)^{2/3}+(y/a)^{2/3}=1$.

Решение. Запишем уравнение астроиды в параметрическом виде $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$. Здесь тоже удобно вычислить сначала

$$xy'-yx'=a^2(\cos^3 t\cdot 3\sin^2 t\cos t+\sin^3 t\cdot 3\cos^2 t\,\sin t)=3a^2\cos^2 t\sin^2 t.$$

Отсюда

$$S=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(xy'-yx')\,dt=\frac{3}{8}a^2\int_0^{2\pi}\sin^2 2t\,dt=\frac{3}{8}a^2\pi.$$

7.4.3. Найти площадь фигуры, ограниченной одной аркой циклоиды $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ и осью Ox.