7.3.24. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ и прямой $x + y = 1$.

7.3.25. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $y^2 = x^2(1 - x^2)$.

7.3.26. Вычислить площадь фигуры, ограниченной петлей кривой

$$x^3 + x^2 - y^2 = 0.$$

7.3.27. Вычислить площадь фигуры, ограниченной осью ординат и кривой $x = y^2(1 - y)$.

7.3.28. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $y = x^4 - 2x^3 + x^2 + 3$, осью абсцисс и двумя ординатами, соответствующими точкам, в которых функция $y(x)$ имеет минимум.

§ 7.4. Вычисление площадей фигур при параметрическом задании границы (контура)

Если граница фигуры задана параметрическими уравнениями

$$x = x(t), \qquad y = y(t),$$

то площадь фигуры вычисляется по одной из трех формул:

$$S = -\int_{\alpha}^{\beta} y(t)\, x'(t)\, dt; \qquad S = \int_{\alpha}^{\beta} x(t)\, y'(t)\, dt; \qquad S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} (xy' - yx')\, dt,$$

где α и β — значения параметра t, соответствующие началу и концу обхода контура в положительном направлении (при котором фигура остается слева).

7.4.1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной эллипсом

$$x = a\cos t, \qquad y = b\sin t \qquad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi).$$

Решение. Здесь удобно вычислить сначала

$$xy' - yx' = a\cos t \cdot b\cos t + b\sin t \cdot a\sin t = ab.$$

Отсюда

$$S = \frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi} (xy' - yx')\, dt = \frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi} ab\, dt = \pi ab.$$

7.4.2. Найти площадь астроиды $(x/a)^{2/3} + (y/a)^{2/3} = 1$.

Решение. Запишем уравнение астроиды в параметрическом виде $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. Здесь тоже удобно вычислить сначала

$$xy' - yx' = a^2(\cos^3 t \cdot 3\sin^2 t\cos t + \sin^3 t \cdot 3\cos^2 t\,\sin t) = 3a^2\cos^2 t\sin^2 t.$$

Отсюда

$$S = \frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi} (xy' - yx')\, dt = \frac{3}{8}a^2\int_{0}^{2\pi} \sin^2 2t\, dt = \frac{3}{8}a^2\pi.$$

7.4.3. Найти площадь фигуры, ограниченной одной аркой циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ и осью Ox.

Решение. Здесь граница фигуры состоит из дуги циклоиды ($0 \leqslant t \leqslant 2\pi$) и отрезка оси Ox ($0 \leqslant x \leqslant 2\pi a$). Применим формулу $S = -\int\limits_{\alpha}^{\beta} yx'\,dt$.

Так как на отрезке оси Ox имеем $y=0$, то остается вычислить интеграл (с учетом направления обхода границы):

$$S = -\int\limits_{2\pi}^{0} a(1-\cos t)\,a(1-\cos t)\,dt = a^2\int\limits_{0}^{2\pi}(1-\cos t)^2\,dt =$$

$$= a^2\int\limits_{0}^{2\pi}\left[1-2\cos t+\frac{1}{2}(1+\cos 2t)\right]dt = 3\pi a^2.$$

7.4.4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой

$$x = a\sin t, \qquad y = b\sin 2t.$$

Решение. Для построения кривой учтем, что она симметрична относительно осей координат. Действительно, если заменить t на $\pi - t$, то переменная x не меняется, а y изменяет только свой знак; следовательно, кривая симметрична относительно оси Ox. При замене же t на $\pi + t$ переменная y не меняется, а x изменяет только свой знак. Это значит, что кривая симметрична относительно оси Oy.

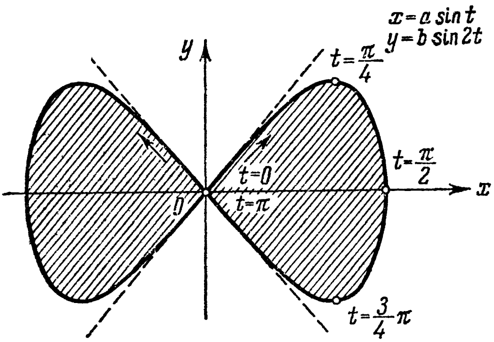

Рис. 79.

Далее, так как функции $x = a\sin t$; $y = b\sin 2t$ имеют общий период 2π, то достаточно ограничиться следующим отрезком изменения параметра: $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

Из уравнений кривой легко заключить, что переменные x и y одновременно сохраняют неотрицательные значения только при изменении параметра t на отрезке $[0, \pi/2]$, поэтому при $0 \leqslant t \leqslant \pi/2$ получается часть кривой, лежащая в первой четверти. Общий вид кривой изображен на рис. 79.

Как видно из этого рисунка, достаточно вычислить площадь одной петли кривой, соответствующей изменению параметра t от 0 до π, и затем удвоить результат

$$S = 2\int\limits_{0}^{\pi} yx'\,dt = 2\int\limits_{0}^{\pi} b\sin 2t\cdot a\cos t\,dt = 4ab\int\limits_{0}^{\pi}\cos^2 t\sin t\,dt =$$

$$= -4ab\left(\frac{\cos^3 t}{3}\right)\Bigg|_0^{\pi} = \frac{8}{3}ab.$$

7.4.5. Найти площадь петли кривой:

$$x=\frac{t}{3}(6-t);\quad y=\frac{t^2}{8}(6-t).$$

Решение. Нас будет интересовать общий вид кривой и точки ее самопересечения. Обе функции $x(t)$ и $y(t)$ определены на всей числовой оси $-\infty<t<\infty$.

Точка самопересечения характерна тем, что в ней совпадают значения абсциссы (и ординаты) при разных значениях параметра. Так как $x=3-(1/3)(t-3)^2$, то абсциссы совпадают при значениях параметра $t=3\pm\lambda$. Чтобы функция $y(t)$ принимала при тех же значениях параметра t одно и то же значение, должно выполняться равенство $\frac{(3+\lambda)^2}{8}(3-\lambda)=\frac{(3-\lambda)^2}{8}(3+\lambda)$ при $\lambda\neq 0$, откуда $\lambda=\pm 3$.

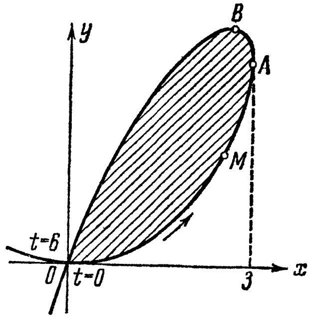

Рис. 80.

Таким образом, при $t_1=0$ и при $t_2=6$ имеем $x(t_1)=x(t_2)=0$ и $y(t_1)=$ $=y(t_2)=0$, т. е. точка (0, 0) является единственной точкой самопересечения. Когда t меняется от 0 до 6, точки кривой лежат в первой четверти. При изменении t от 0 до 3, точка $M(x, y)$ описывает нижнюю часть петли, так как в указанном промежутке $x(t)$ и $y(t)=3tx/8$ возрастают, а затем функция $x(t)$ начинает убывать, в то время как $y(t)$ сначала еще возрастает. На рис. 80 указан обход кривой, соответствующий возрастанию t (фигура остается слева).

Площадь искомой петли удобно считать по формуле

$$S=\frac{1}{2}\int_0^6(xy'-yx')\,dt=\frac{1}{2}\int_0^6\frac{t^2(6-t)^2}{24}\,dt=\frac{27}{5}.$$

7.4.6. Найти площадь петли кривой: $x=t^2$; $y=t-t^3/3$.

7.4.7. Вычислить площадь, содержащуюся внутри кардиоиды:

$$x=a\cos t\,(1+\cos t);\quad y=a\sin t\,(1+\cos t).$$

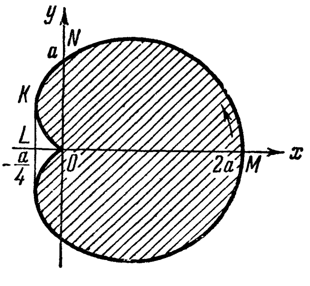

Рис. 81.

Решение. Ввиду периодичности функций $x(t)$ и $y(t)$ достаточно ограничиться рассмотрением отрезка $[-\pi, \pi]$. Кривая симметрична относительно оси Ox, так как при замене t на $-t$ переменная x не меняет своего значения, а y меняет лишь знак; при этом $y\geqslant 0$ при изменении t от 0 до π.

При изменении t от 0 до π функция $u=\cos t$ убывает от 1 до -1; при этом абсцисса $x=au(1+u)=a[-1/4+(u+1/2)^2]$ сначала убывает от

$x|_{u=1} = 2a$ до $x|_{u=-1/2} = -a/4$, а затем возрастает до $x|_{u=-1} = 0$. Можно показать, что ордината y возрастает в интервале $(0 \leqslant t \leqslant \pi/3)$ и убывает в интервале $(\pi/3 \leqslant t \leqslant \pi)$.

Вид кривой показан на рис. 81; там же указано направление обхода ее при возрастании t.

Следовательно,

$$S = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (xy' - yx')\, dt = a^2 \int_{0}^{\pi} (1 + \cos t)^2\, dt = \frac{3}{2} \pi a^2.$$

7.4.8. Вычислить площадь фигуры, ограниченной замкнутой кривой $x = a \cos t$, $y = b \sin^3 t$.

7.4.9. Вычислить площадь петель, образованных кривыми:

а) $x = t^2 - 1$; $y = t^3 - t$; б) $x = 2t - t^2$; $y = 2t^2 - t^3$;

в) $x = t^2$; $y = \frac{t}{3}(3 - t^2)$.

7.4.10. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой

$$x = a \cos t; \qquad y = b \sin t \cos^2 t.$$

7.4.11. Вычислить площадь эволюты эллипса

$$x = \frac{c^2}{a} \cos^3 t; \quad y = -\frac{c^2}{b} \sin^3 t; \quad c^2 = a^2 - b^2.$$

§ 7.5. Площадь в полярных координатах

В полярных координатах площадь сектора, ограниченного дугой кривой $\rho = \rho(\varphi)$ и лучами $\varphi_1 = \alpha$ и $\varphi_2 = \beta$, выражается интегралом

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi)\, d\varphi.$$

7.5.1. Найти площадь фигуры, лежащей в первой четверти и ограниченной параболой $y^2 = 4ax$ и прямыми $y = x - a$ и $x = a$.

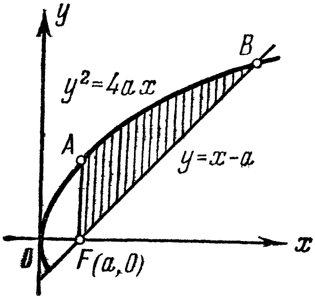

Рис. 82.

Решение. Введем полярную систему координат, поместив полюс в фокус параболы F и направив полярную ось в положительном направлении по оси Ox. Тогда, как известно, уравнение параболы запишется в виде $\rho = \frac{p}{1 - \cos\varphi}$, где p — параметр параболы. В нашем случае $p = 2a$, а фокус F имеет координаты $(a, 0)$. Значит, уравнение параболы примет вид $\rho = \frac{2a}{1 - \cos\varphi}$, а уравнения прямых примут вид $\varphi = \pi/4$ и $\varphi = \pi/2$ (рис. 82). Поэтому

$$S_{FABF} = \frac{1}{2} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{4a^2}{(1 - \cos\varphi)^2}\, d\varphi = 2a^2 \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{d\varphi}{4 \sin^4(\varphi/2)}.$$