

$x|_{u=1} = 2a$ до $x|_{u=-1/2} = -a/4$, а затем возрастает до $x|_{u=-1} = 0$. Можно показать, что ордината y возрастает в интервале $(0 \leq t \leq \pi/3)$ и убывает в интервале $(\pi/3 \leq t \leq \pi)$.

Вид кривой показан на рис. 81; там же указано направление обхода ее при возрастании t .

Следовательно,

$$S = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (xy' - yx') dt = a^2 \int_0^{\pi} (1 + \cos t)^2 dt = \frac{3}{2} \pi a^2.$$

7.4.8. Вычислить площадь фигуры, ограниченной замкнутой кривой $x = a \cos t$, $y = b \sin^3 t$.

7.4.9. Вычислить площадь петель, образованных кривыми:

а) $x = t^2 - 1$; $y = t^3 - t$; б) $x = 2t - t^2$; $y = 2t^2 - t^3$;

в) $x = t^2$; $y = \frac{t}{3}(3 - t^3)$.

7.4.10. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $x = a \cos t$; $y = b \sin t \cos^2 t$.

7.4.11. Вычислить площадь эволюты эллипса

$$x = \frac{c^2}{a} \cos^3 t; \quad y = -\frac{c^2}{b} \sin^3 t; \quad c^2 = a^2 - b^2.$$

§ 7.5. Площадь в полярных координатах

В полярных координатах площадь сектора, ограниченного дугой кривой $\rho = \rho(\varphi)$ и лучами $\varphi_1 = \alpha$ и $\varphi_2 = \beta$, выражается интегралом

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi) d\varphi.$$

7.5.1. Найти площадь фигуры, лежащей в первой четверти и ограниченной параболой $y^2 = 4ax$ и прямыми $y = x - a$ и $x = a$.

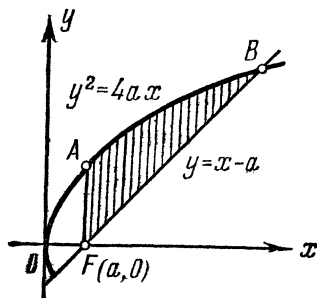


Рис. 82.

Решение. Введем полярную систему координат, поместив полюс в фокус параболы F и направив полярную ось в положительном направлении по оси Ox . Тогда, как известно, уравнение параболы запишется в виде $\rho = \frac{p}{1 - \cos \varphi}$, где p — параметр параболы. В нашем случае $p = 2a$, а фокус F имеет координаты $(a, 0)$. Значит, уравнение параболы примет вид $\rho = \frac{2a}{1 - \cos \varphi}$, а уравнения пря-

мых примут вид $\varphi = \pi/4$ и $\varphi = \pi/2$ (рис. 82). Поэтому

$$S_{FABF} = \frac{1}{2} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{4a^2}{(1 - \cos \varphi)^2} d\varphi = 2a^2 \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{d\varphi}{4 \sin^4(\varphi/2)}.$$

Заменяя

$$\operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} = z, \quad -\frac{d\varphi}{2 \sin^2(\varphi/2)} = dz, \quad \begin{array}{|c|c|} \hline \varphi & z \\ \hline \pi/4 & \operatorname{ctg}(\pi/8) \\ \hline \pi/2 & 1 \\ \hline \end{array},$$

получим

$$S_{FABF} = a^2 \int_1^{\operatorname{ctg}(\pi/8)} (1+z^2) dz = a^2 \left(\operatorname{ctg} \frac{\pi}{8} + \frac{1}{3} \operatorname{ctg}^3 \frac{\pi}{8} - 1 - \frac{1}{3} \right)$$

или, учитывая, что $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{8} = \frac{1 + \cos(\pi/4)}{\sin(\pi/4)} = 1 + \sqrt{2}$,

$$S_{FABF} = 2a^2 \left(1 + \frac{4}{3} \sqrt{2} \right).$$

7.5.2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной:

а) кардиоидой $\rho = 1 + \cos \varphi$; б) кривой $\rho = a \cos \varphi$.

7.5.3. Найти площадь фигуры, лежащей вне круга $\rho = a$ и ограниченной кривой $\rho = 2a \cos 3\varphi$.

Решение. Так как функция $\rho = 2a \cos 3\varphi$ имеет период $T = 2\pi/3$, то при изменении φ от $-\pi$ до π радиус-вектор описывает три равных лепестка кривой. При этом допустимыми для φ являются те значения, при которых $\cos 3\varphi \geq 0$, откуда

$$-\pi/6 + 2k\pi/3 \leq \varphi \leq \pi/6 + 2k\pi/3 \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Следовательно, один из лепестков описывается при изменении φ от $-\pi/6$ до $\pi/6$. Остальные два лепестка получаются при изменении φ от $\pi/2$ до $5\pi/6$ и от $7\pi/6$ до $3\pi/2$ соответственно (рис. 83). Вырезая из лепестков части, принадлежащие кругу $\rho = a$, мы получим фигуру, площадь которой нужно определить. Ясно, что искомая площадь равна утроенной площади

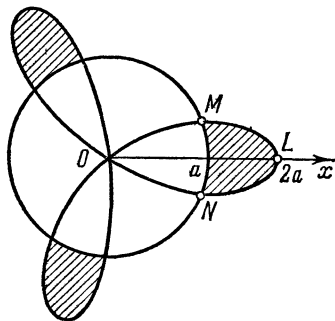


Рис. 83.

S_{MLNM} . Найдем полярные координаты точек пересечения M и N . Для этого решим уравнение $2a \cos 3\varphi = a$, т. е. $\cos 3\varphi = 1/2$. Между $-\pi/6$ и $\pi/6$ находятся только корни $-\pi/9$ и $\pi/9$ ($k=0$). Таким образом, точке N соответствует полярный угол $\varphi_1 = -\pi/9$, точке M — угол $\varphi_2 = \pi/9$.

Далее из рисунка заключаем, что

$$\begin{aligned} S_{MLNM} &= S_{OMLNO} - S_{OMNO} = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi/9}^{\pi/9} 4a^2 \cos^2 3\varphi d\varphi - \frac{1}{2} \int_{-\pi/9}^{\pi/9} a^2 d\varphi = a^2 \left(\frac{\pi}{9} + \frac{\sqrt{3}}{6} \right). \end{aligned}$$

7.5.4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной окружностями $\rho = 3\sqrt{2}a \cos \varphi$ и $\rho = 3a \sin \varphi$.

Решение. Первая окружность лежит в правой полуплоскости, проходит через полюс $\rho = 0$, касаясь вертикальной прямой. Вторая окружность лежит в верхней полуплоскости, проходит через полюс $\rho = 0$, касаясь горизонтальной прямой. Следовательно, полюс есть точка пересечения окружностей. Другая точка пересечения окружностей B находится из уравнения $3\sqrt{2}a \cos \varphi = 3a \sin \varphi$, откуда $B(\arctg \sqrt{2}, a\sqrt{6})$. Из рис. 84 видно, что искомая площадь S равна сумме площадей сегментов $OABO$ и $OCBO$, причем сегменты

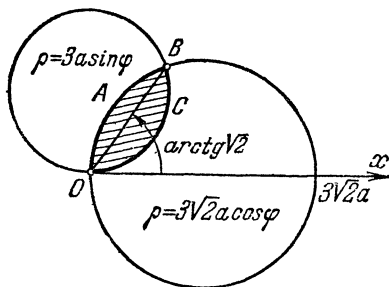


Рис. 84.

примыкают друг к другу по лучу $\varphi = \arctg \sqrt{2}$. При этом дуга BAO описывается концом полярного радиуса ρ первой окружности при $\arctg \sqrt{2} \leq \varphi \leq \pi/2$, а дуга OCB описывается концом полярного радиуса ρ второй окружности при $0 \leq \varphi \leq \arctg \sqrt{2}$. Поэтому

$$S_{OABO} = 9a^2 \int_{\arctg \sqrt{2}}^{\pi/2} \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{9}{2} a^2 \left(\frac{\pi}{2} - \arctg \sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{3} \right),$$

$$S_{OCBO} = \frac{9}{2} a^2 \int_0^{\arctg \sqrt{2}} \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{9}{4} a^2 \left(\arctg \sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{3} \right).$$

Следовательно, $S_{OABO} + S_{OCBO} = 2,25a^2 (\pi - \arctg \sqrt{2} - \sqrt{2})$.

7.5.5. Найти площадь фигуры, вырезаемой окружностью $\rho = \sqrt{3} \sin \varphi$ из кардиоиды $\rho = 1 + \cos \varphi$ (рис. 85).

Решение. Найдем сначала точки пересечения этих кривых. Для этого решим систему

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{3} \sin \varphi, & 0 \leq \varphi \leq \pi, \\ \rho = 1 + \cos \varphi, \end{cases}$$

откуда $\varphi_1 = \pi/3$, $\varphi_2 = \pi$.

Искомая площадь равна сумме двух площадей, одна из которых представляет круговой сегмент, а другая сегмент кардиоиды, причем сегменты примыкают друг к другу по лучу $\varphi = \pi/3$. Дуга BAO описывается концом полярного радиуса ρ кардиоиды при изменении полярного угла φ от $\pi/3$ до π ,

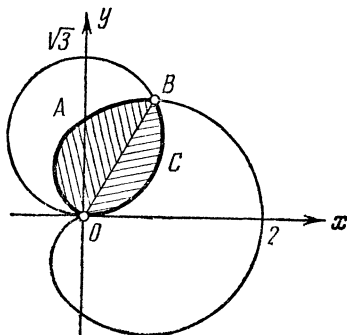


Рис. 85.

а дуга OCB — концом полярного радиуса ρ окружности при $0 \leq \varphi \leq \pi/3$.

Поэтому

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/3} 3 \sin^2 \varphi \, d\varphi + \frac{1}{2} \int_{\pi/3}^{\pi} (1 + \cos \varphi)^2 \, d\varphi =$$

$$= \frac{3}{4} \left(\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{2} \right) \Big|_0^{\pi/3} + \frac{1}{2} \left(\varphi + 2 \sin \varphi + \frac{\varphi}{2} + \frac{\sin 2\varphi}{4} \right) \Big|_{\pi/3}^{\pi} = \frac{3}{4} (\pi - \sqrt{3}).$$

7.5.6. Найти площадь фигуры, ограниченной кардиоидой $\rho = a(1 - \cos \varphi)$ и окружностью $\rho = a$.

7.5.7. Найти площадь петли декартова листа $x^3 + y^3 = 3axy$.

Решение. Перейдем к полярным координатам по обычным формулам $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$. Тогда заданное уравнение переписется в виде

$$\rho^3 (\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi) = 3a\rho^2 \sin \varphi \cos \varphi,$$

или

$$\rho = \frac{3a \sin \varphi \cos \varphi}{\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi} = \frac{3a \sin 2\varphi}{(\sin \varphi + \cos \varphi)(2 - \sin 2\varphi)}.$$

Из этого уравнения вытекает, во-первых, что $\rho = 0$ при $\varphi = 0$ и при $\varphi = \pi/2$ и, во-вторых, $\rho \rightarrow \infty$ при $\varphi \rightarrow 3\pi/4$ и $\varphi \rightarrow -\pi/4$. Последнее означает, что декартов лист имеет асимптоту, уравнение которой $y = -x - a$ можно найти обычным образом в декартовых координатах.

Следовательно, петля декартова листа описывается при изменении φ от 0 до $\pi/2$ и лежит в первой четверти (рис. 86).

Таким образом, искомая площадь равна

$$S_{OAO} = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{9a^2 \cos^3 \varphi \sin^3 \varphi}{(\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi)^2} \, d\varphi.$$

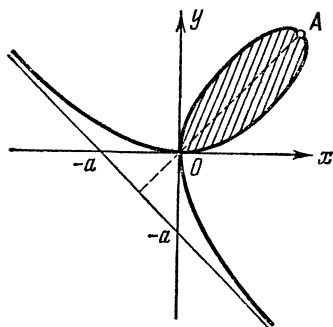


Рис. 86.

Пользуясь симметрией кривой относительно биссектрисы $y = x$, т. е. относительно луча $\varphi = \pi/4$, мы можем вычислить площадь половины петли (от $\varphi = 0$ до $\varphi = \pi/4$) и затем удвоить ее. Это позволит воспользоваться заменой

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi &= z, \\ \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi} &= dz, \end{aligned} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline \varphi & z \\ \hline 0 & 0 \\ \pi/4 & 1 \\ \hline \end{array},$$

что дает

$$S_{OAO} = 9a^2 \int_0^{\pi/4} \frac{\cos^2 \varphi \sin^2 \varphi}{(\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi)^2} d\varphi = 9a^2 \int_0^1 \frac{z^2 dz}{(1+z^3)^2}.$$

Новая замена

$$\begin{aligned} 1 + z^3 &= v, \\ 3z^2 dz &= dv, \end{aligned}$$

z	v
0	1
1	2

приводит к интегралу

$$S_{OAO} = 3a^2 \int_1^2 \frac{dv}{v^2} = \frac{3}{2} a^2.$$

7.5.8. Вычислить площадь фигуры, ограниченной одним лепестком кривых:

а) $\rho = a \cos 2\varphi$; б) $\rho = a \sin 2\varphi$.

7.5.9. Вычислить площадь части кардиоиды $\rho = a(1 - \cos \varphi)$, лежащей внутри окружности $\rho = a \cos \varphi$.

7.5.10. Вычислить площадь фигуры, ограниченной замкнутой кривой $\rho = a \sin \varphi \cos^2 \varphi$, $a > 0$.

7.5.11. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $\rho = a \cos^3 \varphi$ ($a > 0$).

7.5.12. Вычислить площадь части фигуры, ограниченной лемниской Бернулли $\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$, лежащей внутри окружности $\rho = a/\sqrt{2}$.

7.5.13. Перейдя к полярным координатам, вычислить площадь фигуры, ограниченной замкнутой кривой $(x^2 + y^2)^3 = 4a^2 x^2 y^2$.

7.5.14. Перейдя к полярным координатам, вычислить площадь фигуры, ограниченной замкнутой кривой $x^4 + y^4 = a^2(x^2 + y^2)$.

§ 7.6. Вычисление объемов тел

Объем тела выражается интегралом

$$V = \int_a^b S(x) dx,$$

где $S(x)$ — площадь сечения тела плоскостью, перпендикулярной к оси Ox в точке с абсциссой x , a и b — левая и правая границы изменения x . Функция $S(x)$ предполагается известной и непрерывно меняющейся при изменении x от a до b .

Объем V_x тела, образованного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$ ($f(x) \geq 0$), осью абсцисс и прямыми $x = a$ и $x = b$ ($a < b$), выражается интегралом

$$V_x = \pi \int_a^b y^2 dx.$$

Объем тела V_x , образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной