что дает

$$S_{OAO} = 9a^2 \int_0^{\pi/4} \frac{\cos^2\varphi \sin^2\varphi}{(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi)^2}\, d\varphi = 9a^2 \int_0^1 \frac{z^2\,dz}{(1+z^3)^2}.$$

Новая замена

$$1 + z^3 = v, \qquad 3z^2\,dz = dv,$$

z	v
0	1
1	2

приводит к интегралу

$$S_{OAO} = 3a^2 \int_1^2 \frac{dv}{v^2} = \frac{3}{2}a^2.$$

7.5.8. Вычислить площадь фигуры, ограниченной одним лепестком кривых:

а) $\rho = a\cos 2\varphi$; б) $\rho = a\sin 2\varphi$.

7.5.9. Вычислить площадь части кардиоиды $\rho = a(1-\cos\varphi)$, лежащей внутри окружности $\rho = a\cos\varphi$.

7.5.10. Вычислить площадь фигуры, ограниченной замкнутой кривой $\rho = a\sin\varphi\cos^2\varphi$, $a > 0$.

7.5.11. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $\rho = a\cos^3\varphi$ $(a > 0)$.

7.5.12. Вычислить площадь части фигуры, ограниченной лемнискатой Бернулли $\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$, лежащей внутри окружности $\rho = a/\sqrt{2}$.

7.5.13. Перейдя к полярным координатам, вычислить площадь фигуры, ограниченной замкнутой кривой $(x^2+y^2)^3 = 4a^2x^2y^2$.

7.5.14. Перейдя к полярным координатам, вычислить площадь фигуры, ограниченной замкнутой кривой $x^4 + y^4 = a^2(x^2+y^2)$.

§ 7.6. Вычисление объемов тел

Объем тела выражается интегралом

$$V = \int_a^b S(x)\,dx,$$

где $S(x)$ — площадь сечения тела плоскостью, перпендикулярной к оси Ox в точке с абсциссой x, a и b — левая и правая границы изменения x. Функция $S(x)$ предполагается известной и непрерывно меняющейся при изменении x от a до b.

Объем V_x тела, образованного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$ $(f(x) \geqslant 0)$, осью абсцисс и прямыми $x = a$ и $x = b$ $(a < b)$, выражается интегралом

$$V_x = \pi \int_a^b y^2\,dx.$$

Объем тела V_x, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной кривыми $y=y_1(x)$ и $y=y_2(x)$ $[0 \leqslant y_1(x) \leqslant y_2(x)]$ и прямыми $x=a$, $x=b$, выражается интегралом

$$V_x = \pi \int_a^b (y_2^2 - y_1^2)\,dx.$$

Если кривая задана параметрически или в полярных координатах, то следует сделать соответствующую замену переменной в указанных формулах.

7.6.1. Определить объем эллипсоида

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1.$$

Решение. Сечение эллипсоида плоскостью $x = \text{const}$ есть эллипс (рис. 87)

$$\frac{y^2}{b^2(1 - x^2/a^2)} + \frac{z^2}{c^2(1 - x^2/a^2)} = 1$$

с полуосями $b\sqrt{1 - x^2/a^2}$; $c\sqrt{1 - x^2/a^2}$. Следовательно, площадь сечения (см. **7.4.1**)

$$S(x) = \pi b\sqrt{1 - x^2/a^2} \cdot c\sqrt{1 - x^2/a^2} = \pi bc\,(1 - x^2/a^2) \quad (-a \leqslant x \leqslant a).$$

Поэтому объем V эллипсоида равен

$$V = \int_{-a}^{a} \pi bc \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \pi bc \left[x - \frac{x^3}{3a^2}\right]_{-a}^{a} = \frac{4}{3}\pi abc.$$

Положив, в частности, $a = b = c$, получим объем шара $V_{\text{шара}} = \frac{4}{3}\pi a^3$.

7.6.2. Вычислить объем шарового слоя, вырезанного из шара $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ плоскостями $x = 2$ и $x = 3$.

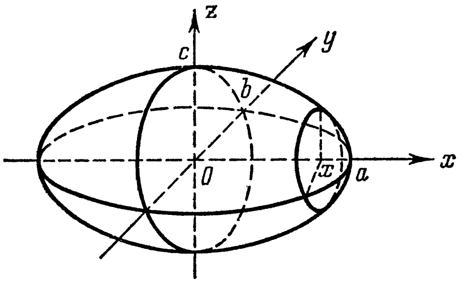

Рис. 87.

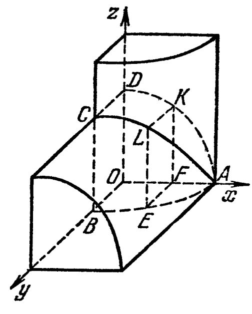

Рис. 88.

7.6.3. Оси двух одинаковых цилиндров с радиусами основания, равными a, пересекаются под прямым углом. Найти объем тела, составляющего общую часть этих двух цилиндров.

Решение. Примем оси цилиндров за оси Oy и Oz (рис. 88). Тело $OABCD$ составляет восьмую часть интересующего нас тела.

Пересечем это тело плоскостью, перпендикулярной к оси Ox, на расстоянии x от 0. В сечении получим квадрат $EFKL$ со стороной $EF=\sqrt{a^2-x^2}$, поэтому $S(x)=a^2-x^2$ и $V=8\int\limits_0^a (a^2-x^2)\,dx=\frac{16}{3}a^3$.

7.6.4. На всех хордах круга радиуса R, параллельных одному направлению, построены симметричные параболические сегменты постоянной высоты h. Плоскости сегментов перпендикулярны к плоскости круга.

Найти объем образованного таким путем тела (рис. 89).

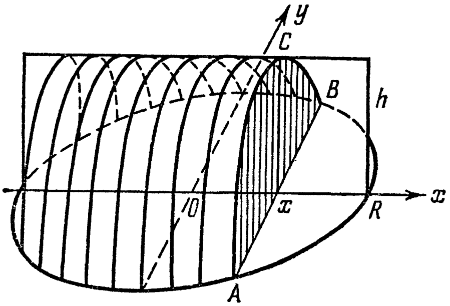

Рис. 89.

Решение. Предварительно вычислим площадь параболического сегмента с основанием a и высотой h. Расположим оси координат так, как указано на рис. 90. В этом случае уравнение параболы будет $y=\alpha x^2+h$.

Определим параметр α. Подставив координаты точки $B(a/2,\ 0)$, получим $0=\alpha a^2/4+h$, отсюда $\alpha=-4h/a^2$, следовательно, уравнение параболы $y=-\frac{4h}{a^2}x^2+h$, а искомая площадь —

$$S=2\int\limits_0^{a/2} y\,dx=2\int\limits_0^{a/2}\left(-\frac{4h}{a^2}x^2+h\right)dx=\frac{2}{3}ah.$$

Теперь вычислим объем тела. Если расположить оси координат так, как показано на рис. 89, то в сечении тела плоскостью, перпендикулярной к оси Ox, в точке с абсциссой x получится параболический сегмент, площадь которого, как мы видели, равна $S=(2/3)\,ah$, где $a=2y=2\sqrt{R^2-x^2}$. Следовательно, $S(x)=(4/3)\sqrt{R^2-x^2}\,h$ и

$$V=\int\limits_{-R}^{R} S(x)\,dx=$$

$$=\frac{8}{3}h\int\limits_0^R \sqrt{R^2-x^2}\,dx=\frac{2}{3}\pi hR^2.$$

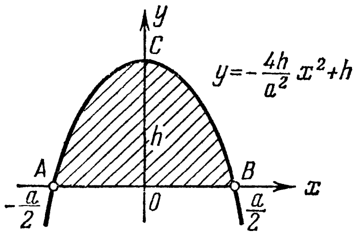

Рис. 90.

7.6.5. Плоскость движущегося треугольника остается перпендикулярной к неподвижному диаметру круга радиуса a; его основание есть хорда круга, а вершина лежит на прямой, параллельной неподвижному диаметру, на расстоянии h от плоскости круга. Найти объем тела, образуемого движением этого треугольника от одного конца диаметра до другого.

7.6.6. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox площади, ограниченной осями координат и параболой $x^{1/2}+y^{1/2}=a^{1/2}$.

Решение. Найдем точки пересечения кривой с осями координат: при $x=0$ $y=a$, при $y=0$ $x=a$. Таким образом, отрезок интегрирования есть $[0, a]$.

Далее, из уравнения параболы получим $y=(a^{1/2}-x^{1/2})^2$. Поэтому

$$V=\pi\int_0^a y^2\,dx=\pi\int_0^a (a^{1/2}-x^{1/2})^4\,dx=$$

$$=\pi\int_0^a (a^2-4a^{3/2}x^{1/2}+6ax-4a^{1/2}x^{3/2}+x^2)\,dx=\frac{1}{15}\pi a^3.$$

7.6.7. Фигура, ограниченная дугой синусоиды $y=\sin x$, осью ординат и прямой $y=1$, вращается вокруг оси Oy (рис. 91).

Определить объем V получающегося тела вращения.

Решение. Обратная функция $x=\arcsin y$ рассматривается на отрезке $[0, 1]$. Поэтому

$$V=\pi\int_{y_1}^{y_2} x^2\,dy=\pi\int_0^1 (\arcsin y)^2\,dy.$$

Применим подстановку $\arcsin y=t$. Отсюда

$$y=\sin t,\qquad dy=\cos t\,dt,\qquad \left|\begin{array}{c|c} y & t \\ \hline 0 & 0 \\ 1 & \pi/2 \end{array}\right|.$$

Значит, $V=\pi\int\limits_0^{\pi/2} t^2\cos t\,dt$. Интегрируя по частям, получим $V=\pi(\pi^2-8)/4$.

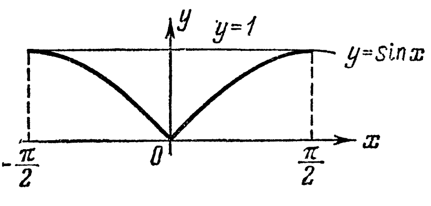

Рис. 91.

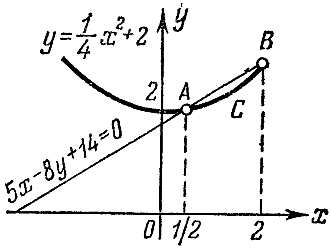

Рис. 92.

7.6.8. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной параболой $y=0{,}25x^2+2$ и прямой $5x-8y+14=0$.

Решение. Тело образовано вращением фигуры $ABCA$ (рис. 92) вокруг оси Ox. Чтобы найти абсциссы точек A и B, решаем систему уравнений:

$$\begin{cases} y=\frac{1}{4}x^2+2, \\ 5x-8y+14=0. \end{cases}$$

Отсюда $x_A=1/2$; $x_B=2$. В нашем случае $y_1(x)=(1/4)x^2+2$ и $y_2(x)=(5/8)x+7/4$. Следовательно,

$$V=\pi\int\limits_{1/2}^{2}\left[\frac{1}{16}\left(\frac{5}{2}x+7\right)^2-\left(\frac{1}{4}x^2+2\right)^2\right]dx=\frac{891}{1280}\pi.$$

7.6.9. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной параболами $y=x^2$ и $8x=y^2$.

Решение. Очевидно, что $x_2(y)=\sqrt{y}\geqslant x_1(y)=y^2/8$ на отрезке от начала координат до точки пересечения парабол (рис. 93). Найдем ординаты точек пересечения парабол, исключив x из системы уравнений:

$$\begin{cases} y=x^2, \\ y^2=8x. \end{cases}$$

Получим $y_1=0$, $y_2=4$. Следовательно, $V=\pi\int\limits_0^4\left(y-\frac{y^4}{64}\right)dy=\frac{24}{5}\pi.$

7.6.10. Вычислить объем тора. Тором называется тело, получающееся при вращении круга радиуса a вокруг оси, лежащей в его плоскости на расстоянии b от центра ($b\geqslant a$). (Форму тора имеет, например, автомобильная шина.)

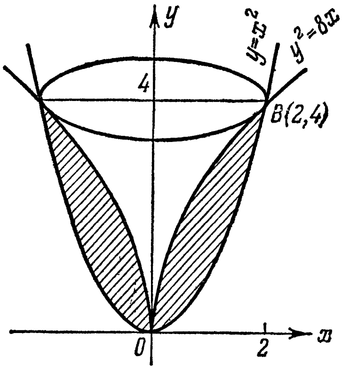

Рис. 93.

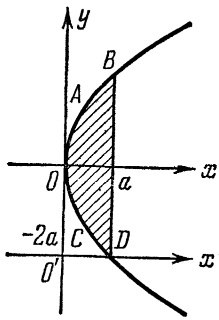

Рис. 94.

7.6.11. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной двумя ветвями кривой $(y-x)^2=x^3$ и прямой $x=1$.

7.6.12. Найти объем тела, образованного вращением вокруг прямой $y=-2a$ фигуры, ограниченной параболой $y^2=4ax$ и прямой $x=a$ (рис. 94).

Решение. Если перенести начало координат в точку $O'(0, -2a)$, сохранив направление осей, то в новой системе координат уравнение параболы запишется так:

$$(y'-2a)^2 = 4ax.$$

Отсюда $y_2 = 2a + \sqrt{4ax}$ (для кривой OAB), и $y_1 = 2a - \sqrt{4ax}$ (для кривой OCD). Искомый объем равен

$$V = \pi \int_0^a (y_2^2 - y_1^2)\,dx =$$

$$= \pi \int_0^a [(2a + 2\sqrt{ax})^2 - (2a - 2\sqrt{ax})^2]\,dx = \frac{32}{3}\pi a^3.$$

7.6.13. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной астроидой: $x = a\cos^3 t$; $y = a\sin^3 t$.

Решение. Искомый объем V равен удвоенному объему, полученному вращением фигуры OAB (рис. 95). Поэтому

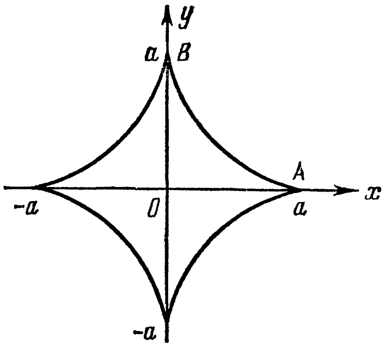

Рис. 95.

$$V = 2\pi \int_0^a y^2\,dx.$$

Делаем замену переменной:

$$x = a\cos^3 t,$$
$$dx = -3a\cos^2 t \sin t\,dt,$$
$$y = a\sin^3 t,$$

x	t
0	$\pi/2$
a	0

Следовательно,

$$V = 2\pi \int_{\pi/2}^{0} a^2 \sin^6 t\,(-3a\cos^2 t \sin t)\,dt =$$

$$= 6\pi a^3 \left[\int_0^{\pi/2} \sin^7 t\,dt - \int_0^{\pi/2} \sin^9 t\,dt\right].$$

Используя формулу из **6.6.9** для вычисления фигурирующих здесь интегралов, получаем

$$V = 6\pi a^3 \left(\frac{6}{7}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3} - \frac{8}{9}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\right) = \frac{32}{105}\pi a^3.$$

7.6.14. Вычислить объем тела, которое образуется при вращении одной арки циклоиды $x = a(t - \sin t)$; $y = a(1 - \cos t)$ вокруг оси Ox.

7.6.15. Вычислить объем тела, которое получается от вращения кардиоиды $\rho = a(1 + \cos\varphi)$, вокруг полярной оси.

Решение. Кардиоида изображена на рис. 81, стр. 293. Искомый объем представляет собой разность объемов, получаемых от вращения вокруг оси Ox (она же и полярная ось) фигур $MNKLO$ и $OKLO$.

Перейдем, как и в предыдущей задаче, к параметрическому заданию кривой, приняв за параметр полярный угол φ:

$$x = \rho\cos\varphi = a\cos\varphi\,(1+\cos\varphi),$$
$$y = \rho\sin\varphi = a\sin\varphi\,(1+\cos\varphi).$$

Очевидно, что абсцисса точки M равна $2a$ (значение x при $\varphi = 0$). Абсцисса же точки K есть значение минимума функции $x = a\,(1+\cos\varphi)\cos\varphi$.

Найдем этот минимум:

$$\frac{dx}{d\varphi} = -a\sin\varphi\,(1+2\cos\varphi) = 0,$$
$$\varphi_1 = 0; \quad \varphi_2 = (2/3)\,\pi.$$

При $\varphi_1 = 0$ получаем $x_M = 2a$, при $\varphi_2 = (2/3)\,\pi$ получаем $x_K = -a/4$.

Следовательно, искомый объем равен

$$V = \pi \int_{-a/4}^{2a} y_2^2\,dx - \pi \int_{-a/4}^{0} y_1^2\,dx.$$

Делая замену $x = a\cos\varphi\,(1+\cos\varphi)$, получим

$$y^2 = a^2(1+\cos\varphi)^2\sin^2\varphi,$$
$$dx = -a\sin\varphi\,(1+2\cos\varphi)\,d\varphi,$$

x	φ
$-a/4$	$2\pi/3$
$2a$	0

,

x	φ
$-a/4$	$2\pi/3$
0	π

.

Таким образом,

$$V = \pi \int_{(2/3)\,\pi}^{0} a^2(1+\cos\varphi)^2\sin^2\varphi\,[-a\sin\varphi\,(1+2\cos\varphi)]\,d\varphi -$$
$$-\pi \int_{(2/3)\,\pi}^{\pi} a^2(1+\cos\varphi)^2\sin^2\varphi\,[-a\sin\varphi\,(1+2\cos\varphi)]\,d\varphi =$$
$$= \pi a^3 \int_{0}^{\pi} \sin^3\varphi\,(1+\cos\varphi)^2(1+2\cos\varphi)\,d\varphi =$$
$$= \pi a^3 \int_{-1}^{1} (1-u^2)(1+u)^2(1+2u)\,du = \frac{8}{3}\pi a^3 \qquad (u = \cos\varphi).$$

7.6.16. Вычислить объем тела, ограниченного:

а) однополостным гиперболоидом $x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = 1$ и плоскостями $z = -1$ и $z = 1$;

б) параболическим цилиндром $z=4-y^2$, плоскостями координат и плоскостью $x=a$;

в) эллиптическим параболоидом $z=x^2/a^2+y^2/b^2$ и плоскостью $z=k$ $(k>0)$.

7.6.17. От прямого кругового цилиндра радиуса a отсечен клин плоскостью, проходящей через диаметр основания и наклоненной к основанию под углом α. Найти объем клина.

7.6.18. Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями:

а) $xy=4$, $x=1$, $x=4$, $y=0$, вокруг оси Ox;

б) $y=2x-x^2$, $y=0$, вокруг оси Ox;

в) $y=x^3$, $y=0$, $x=2$, вокруг оси Oy;

г) $y=\sin x$ (одной волной), $y=0$, вокруг оси Ox;

д) $x^2-y^2=4$, $y=\pm 2$, вокруг оси Oy;

е) $(y-a)^2=ax$, $x=0$, $y=2a$, вокруг оси Ox.

7.6.19. Найти объем тела, образованного вращением кривой $y^2=(ax^3-x^4)/a^2$ вокруг оси Ox.

7.6.20. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y=\sin x$ и $y=(2/\pi)\,x$.

7.6.21. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной цепной линией $y=\frac{a}{2}(e^{x/a}+e^{-x/a})=a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$ и прямыми $x_1=-c$, $x_2=c$ $(c>0)$.

7.6.22. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной косинусоидой $y=\cos x$ и параболой $y=\frac{9}{2\pi^2}x^2$.

7.6.23. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной окружностью $x^2+y^2=1$ и параболой $y^2=(3/2)x$.

7.6.24. На кривой $y=x^3$ взяты две точки: A и B, абсциссы которых соответственно $a=1$ и $b=2$.

Найти объем тела, полученного вращением криволинейной трапеции $aABb$ вокруг оси Ox.

7.6.25. Дуга эволюты эллипса $x=a\cos t$; $y=b\sin t$, лежащая в первом квадранте, вращается вокруг оси Ox.

Чему равен объем получающегося тела вращения?

7.6.26. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox петли кривой $x=at^2$, $y=a(t-t^3/3)$.

7.6.27. Вычислить объемы тел, полученных вращением лемнискаты $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ вокруг осей Ox и Oy.

7.6.28. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг полярной оси кривой $\rho=a\cos^2\varphi$.