§ 7.7. Вычисление длин дуг плоских кривых, заданных в декартовых координатах

Если плоская кривая задана уравнением $y=y(x)$ и производная $y'(x)$ непрерывна, то длина дуги этой кривой выражается интегралом:

$$l=\int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx,$$

где a и b — абсциссы концов данной дуги.

7.7.1. Вычислить длину дуги полукубической параболы

$$y^2=x^3,$$

заключенной между точками (0, 0) и (4, 8) (рис. 96).

Решение. Функция $y(x)$ определена для $x \geqslant 0$. Поскольку данные точки лежат в первой четверти, $y=x^{3/2}$. Отсюда

$$y'=\frac{3}{2}\sqrt{x} \text{ и } \sqrt{1+y'^2}=\sqrt{1+\frac{9}{4}x}.$$

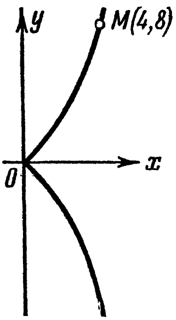

Рис. 96.

Следовательно,

$$l=\int_0^4 \sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx=\frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{3/2}\Bigg|_0^4=$$

$$=\frac{8}{27}(10\sqrt{10}-1).$$

7.7.2. Вычислить длину дуги кривой $y^2=x^3$, отсеченной прямой $x=4/3$.

7.7.3. Вычислить длину дуги кривой $y=\ln\cos x$, заключенной между точками с абсциссами $x=0, x=\pi/4$.

Решение. Так как $y'=-\operatorname{tg} x$, то $\sqrt{1+y'^2}=\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}=$ $=\sec x$.

Следовательно,

$$l=\int_0^{\pi/4}\sec x\,dx=\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi/4}=\ln\operatorname{tg}\frac{3\pi}{8}.$$

7.7.4. Вычислить длину дуги кривой $y=\ln\frac{e^x+1}{e^x-1}$ от $x_1=a$ до $x_2=b$ $(b>a)$.

7.7.5. Вычислить длину дуги кривой $x=\frac{1}{4}y^2-\frac{1}{2}\ln y$, заключенной между точками с ординатами $y=1$ и $y=2$.

Решение. В этой задаче удобнее за независимую переменную принять y: тогда $x'=\frac{1}{2}y-\frac{1}{2y}$ и $\sqrt{1+x'^2}=\sqrt{\left(\frac{1}{2}y+\frac{1}{2y}\right)^2}=$ $=\frac{1}{2}y+\frac{1}{2y}$.

Следовательно,

$$l=\int_1^2\sqrt{1+x'^2}\,dy=\int_1^2\left(\frac{1}{2}y+\frac{1}{2y}\right)dy=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\ln 2.$$

7.7.6. Вычислить длину дуги астроиды $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$.

Решение. Как известно, астроида симметрична относительно осей координат и биссектрис координатных углов. Поэтому достаточно вычислить длину дуги астроиды, заключенной между биссектрисой $y=x$ и осью Ox, и результат умножить на 8.

В первой четверти $y=(a^{2/3}-x^{2/3})^{3/2}$ и $y=0$ при $x=a$, $y=x$ при $x=\frac{a}{2^{3/2}}$.

Далее,

$$y'=\frac{3}{2}(a^{2/3}-x^{2/3})^{1/2}\left(-\frac{2}{3}\right)x^{-1/3}=-x^{-1/3}(a^{2/3}-x^{2/3})^{1/2}$$

и

$$\sqrt{1+y'^2}=\sqrt{1+x^{-2/3}(a^{2/3}-x^{2/3})}=(a/x)^{1/3}.$$

Следовательно,

$$l=8\int\limits_{a/2^{3/2}}^{a}a^{1/3}x^{-1/3}\,dx=6a.$$

Замечание. Если бы мы стали вычислять длину дуги астроиды, лежащей в первой четверти, то пришли бы к интегралу

$$\int\limits_0^a a^{1/3}x^{-1/3}\,dx,$$

подынтегральная функция которого возрастает до бесконечности при $x\to 0$.

7.7.7. Вычислить длину дуги кривой $OABCO$, состоящей из участков кривых $y^2=2x^3$ и $x^2+y^2=20$ (рис. 97).

Решение. Достаточно вычислить длины дуг $l_{\smile OA}$ и $l_{\smile AB}$, так как в силу симметрии фигуры относительно оси Ox

$$l=2(l_{\smile OA}+l_{\smile AB}).$$

Решив систему уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2=20,\\ y^2=2x^3,\end{cases}$$

найдем точку $A(2,\ 4)$.

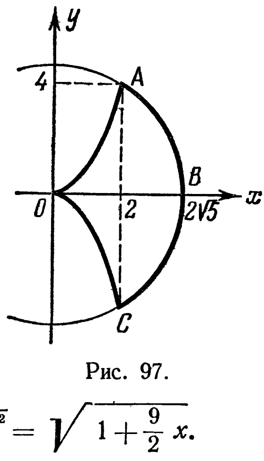

Рис. 97.

Найдем $l_{\smile OA}$. Здесь

$$y=\sqrt{2}\,x^{3/2},\quad y'=\frac{3}{2}\sqrt{2x},\quad \sqrt{1+y'^2}=\sqrt{1+\frac{9}{2}x}.$$

Следовательно,

$$l_{\smile OA}=\int\limits_0^2\sqrt{1+\frac{9}{2}x}\,dx=\frac{4}{27}(10\sqrt{10}-1).$$

Так как $l_{\smile AB}$ есть длина дуги окружности радиуса $\sqrt{20}$, соответствующей центральному углу $\operatorname{arctg} 2$, то

$$l_{\smile AB} = \sqrt{20} \operatorname{arctg} 2.$$

Окончательно имеем

$$l = \frac{8}{27}(10\sqrt{10} - 1) + 4\sqrt{5} \operatorname{arctg} 2.$$

7.7.8. Вычислить длину дуги кривой:

а) $y = x^2/2 - 1$, отсеченной осью Ox;

б) $y = \ln(2\cos x)$ между соседними точками пересечения с осью Ox;

в) $3y^2 = x(x-1)^2$ между точками пересечения с осью Ox (половину длины петли).

7.7.9. Вычислить длину дуги кривой

$$y = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2 - 1} - \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)\right]$$

от $x = 1$ до $x = a + 1$.

7.7.10. Найти длину дуги кривой, состоящей из участков кривых $x^2 = (y+1)^3$ и $y = 4$.

§ 7.8. Вычисление длин дуг кривых, заданных параметрически

Если кривая задана уравнениями в параметрической форме $x = x(t)$, $y = y(t)$ и производные $x'(t)$, $y'(t)$ непрерывны на отрезке $[t_1, t_2]$, то длина дуги кривой выражается интегралом

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\, dt,$$

где t_1 и t_2 — значения параметра t, соответствующие концам дуги ($t_1 < t_2$).

7.8.1. Вычислить длину дуги развертки круга $x = a(\cos t + t\sin t)$, $y = a(\sin t - t\cos t)$ от $t = 0$ до $t = 2\pi$.

Решение. Дифференцируя по t, получим

$$x'_t = at\cos t, \qquad y'_t = at\sin t,$$

откуда $\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2} = at$. Следовательно,

$$l = \int_0^{2\pi} at\, dt = \left.\frac{at^2}{2}\right|_0^{2\pi} = 2a\pi^2.$$

7.8.2. Вычислить длину одной арки циклоиды:

$$x = a(t - \sin t), \qquad y = a(1 - \cos t).$$