Так как $l_{\smile AB}$ есть длина дуги окружности радиуса $\sqrt{20}$, соответствующей центральному углу $\operatorname{arctg} 2$, то

$$l_{\smile AB} = \sqrt{20} \operatorname{arctg} 2.$$

Окончательно имеем

$$l = \frac{8}{27}(10\sqrt{10} - 1) + 4\sqrt{5} \operatorname{arctg} 2.$$

7.7.8. Вычислить длину дуги кривой:

а) $y = x^2/2 - 1$, отсеченной осью Ox;

б) $y = \ln(2\cos x)$ между соседними точками пересечения с осью Ox;

в) $3y^2 = x(x-1)^2$ между точками пересечения с осью Ox (половину длины петли).

7.7.9. Вычислить длину дуги кривой

$$y = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2-1} - \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)\right]$$

от $x = 1$ до $x = a + 1$.

7.7.10. Найти длину дуги кривой, состоящей из участков кривых $x^2 = (y+1)^3$ и $y = 4$.

§ 7.8. Вычисление длин дуг кривых, заданных параметрически

Если кривая задана уравнениями в параметрической форме $x = x(t)$, $y = y(t)$ и производные $x'(t)$, $y'(t)$ непрерывны на отрезке $[t_1, t_2]$, то длина дуги кривой выражается интегралом

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\, dt,$$

где t_1 и t_2 — значения параметра t, соответствующие концам дуги ($t_1 < t_2$).

7.8.1. Вычислить длину дуги развертки круга $x = a(\cos t + t\sin t)$, $y = a(\sin t - t\cos t)$ от $t = 0$ до $t = 2\pi$.

Решение. Дифференцируя по t, получим

$$x'_t = at\cos t, \qquad y'_t = at\sin t,$$

откуда $\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2} = at$. Следовательно,

$$l = \int_0^{2\pi} at\, dt = \left.\frac{at^2}{2}\right|_0^{2\pi} = 2a\pi^2.$$

7.8.2. Вычислить длину одной арки циклоиды:

$$x = a(t - \sin t), \qquad y = a(1 - \cos t).$$

7.8.3. Вычислить длину астроиды: $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$.

Решение. Дифференцируя по t, получим

$$x'_t = -3a\cos^2 t\sin t;$$
$$y'_t = 3a\sin^2 t\cos t.$$

Отсюда

$$\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2} = \sqrt{9a^2\sin^2 t\cos^2 t} = 3a\,|\sin t\cos t| =$$
$$= \frac{3a}{2}|\sin 2t|.$$

Так как функция $|\sin 2t|$ имеет период $\pi/2$, то

$$l = 4\cdot\frac{3a}{2}\int_0^{\pi/2}\sin 2t\,dt = 6a.$$

Замечание. Если бы мы забыли, что нужно брать арифметическое значение корня, и положили $\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2} = 3a\sin t\cos t$, то получили бы неверный результат, так как

$$3a\int_0^{2\pi}\sin t\cos t\,dt = \frac{3a}{2}\sin^2 t\Big|_0^{2\pi} = 0.$$

7.8.4. Вычислить длину петли кривой $x = \sqrt{3}\,t^2$, $y = t - t^3$.

Решение. Найдем пределы интегрирования. Обе функции $x(t)$ и $y(t)$ определены при всех значениях t. Так как функция $x = \sqrt{3}\,t^2 \geqslant 0$, то кривая лежит в правой полуплоскости. Так как при изменении знака параметра t величина $x(t)$ не изменяется, а $y(t)$ меняет знак, то кривая симметрична относительно оси Ox. Кроме того, функция $x(t)$ принимает одно и то же значение не более, чем два раза. Отсюда следует, что точки самопересечения кривой лежат на оси Ox, т. е. при $y = 0$ (рис. 98).

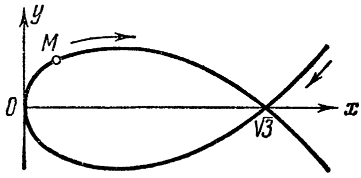

Рис. 98.

На рисунке стрелками показано то направление, в котором текущая точка $M(x, y)$ пробегает кривую при изменении t от $-\infty$ до ∞.

Но $y = 0$ при $t_1 = 0$, $t_{2,3} = \pm 1$. Так как $x(t_2) = x(t_3) = \sqrt{3}$, то точка $(\sqrt{3}, 0)$ является единственной точкой самопересечения кривой. Следовательно, мы должны интегрировать в пределах от $t_2 = -1$ до $t_3 = 1$.

Дифференцируя параметрические уравнения кривой по t, получим $x'_t = 2\sqrt{3}\,t$, $y'_t = 1 - 3t^2$, откуда

$$\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2} = 1 + 3t^2.$$

Следовательно,

$$l=\int_{-1}^{1}(1+3t^2)\,dt=4.$$

7.8.5. Вычислить длину дуги кривой $x=t^6/6$, $y=2-t^4/4$ между точками пересечения с осями координат.

7.8.6. Вычислить длину дуги эллипса $x^2/a^2+y^2/b^2=1$.

Решение. Перейдем к параметрическому заданию эллипса

$$x=a\cos t,\quad y=b\sin t,\quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi.$$

Дифференцируя по t, получаем

$$x'_t=-a\sin t;\quad y'_t=b\cos t,$$

откуда

$$\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}=\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}=a\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2 t},$$

где ε — эксцентриситет эллипса, $\varepsilon=c/a=\sqrt{a^2-b^2}/a$.

Таким образом,

$$l=a\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2 t}\,dt=4a\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2 t}\,dt.$$

Интеграл $\int\limits_0^t\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2 t}\,dt$ не берется в элементарных функциях; он называется *эллиптическим интегралом второго рода*. Полагая $t=\pi/2-\tau$, приводим интеграл к стандартному виду:

$$\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2 t}\,dt=\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\tau}\,d\tau=E(\varepsilon),$$

где $E(\varepsilon)$ — обозначение для так называемого *полного эллиптического интеграла второго рода*.

Следовательно, для длины дуги эллипса имеет место формула $l=4a\,E(\varepsilon)$.

Обычно полагают $\varepsilon=\sin\alpha$ и пользуются таблицами функции

$$E_1(\alpha)=E_1(\arcsin\varepsilon)=E(\varepsilon).$$

Например, если $a=10$ и $b=6$, то

$$\varepsilon=\frac{\sqrt{10^2-6^2}}{10}=0{,}8=\sin 53^\circ.$$

По таблице значений эллиптических интегралов второго рода находим $l=40\,E_1(53^\circ)=40\cdot 1{,}2776\approx 51{,}1$.

7.8.7. Вычислить длину дуги кривой

$$x=t^2,\qquad y=\frac{t}{3}(t^2-3)$$

между точками пересечения с осью Ox.

7.8.8. Найти длину дуги кардиоиды:

$$x=a(2\cos t-\cos 2t),$$
$$y=a(2\sin t-\sin 2t).$$

7.8.9. Найти длину замкнутой кривой

$$x=4\sqrt{2}\,a\sin t;\quad y=a\sin 2t.$$

7.8.10. Найти длину дуги эволюты эллипса

$$x=\frac{c^2}{a}\cos^3 t,\qquad y=-\frac{c^2}{b}\sin^3 t,\quad c^2=a^2-b^2.$$

7.8.11. Вычислить длину дуги кривой

$$x=(t^2-2)\sin t+2t\cos t,$$
$$y=(2-t^2)\cos t+2t\sin t$$

от $t_1=0$ до $t_2=\pi$.

7.8.12. На циклоиде $x=a(t-\sin t)$; $y=a(1-\cos t)$ найти точку, которая делит первую арку циклоиды по длине в отношении 1:3.

§ 7.9. Вычисление длин дуг кривых, заданных в полярных координатах

Если гладкая кривая задана уравнением $\rho=\rho(\varphi)$ в полярных координатах, то длина дуги l кривой выражается интегралом:

$$l=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\sqrt{\rho^2+\rho_\varphi'^2}\,d\varphi,$$

где φ_1 и φ_2 — значения полярного угла φ в концах дуги ($\varphi_1<\varphi_2$).

7.9.1. Найти длину первого витка архимедовой спирали $\rho=a\varphi$.

Решение. Первый виток архимедовой спирали образуется при изменении полярного угла φ от 0 до 2π. Поэтому

$$l=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\varphi^2+a^2}\,d\varphi=a\int_0^{2\pi}\sqrt{\varphi^2+1}\,d\varphi=$$
$$=a\left[\pi\sqrt{4\pi^2+1}+\frac{1}{2}\ln\left(2\pi+\sqrt{4\pi^2+1}\right)\right].$$

7.9.2. Вычислить длину логарифмической спирали $\rho=ae^{m\varphi}$ от некоторой ее точки (ρ_0, φ_0) до переменной точки (ρ, φ).

Решение. В этом случае (независимо от того, какая из величин ρ и ρ_0 больше!)

$$l=\left|\int_{\varphi_0}^{\varphi}\sqrt{a^2e^{2m\varphi}+a^2m^2e^{2m\varphi}}\,d\varphi\right|=$$
$$=a\sqrt{1+m^2}\left|\int_{\varphi_0}^{\varphi}e^{m\varphi}\,d\varphi\right|=a\,\frac{\sqrt{1+m^2}}{m}\left|e^{m\varphi}-e^{m\varphi_0}\right|=$$
$$=\frac{\sqrt{1+m^2}}{m}\left|\rho-\rho_0\right|=\frac{\sqrt{1+m^2}}{m}\left|\Delta\rho\right|,$$