7.8.8. Найти длину дуги кардиоиды:

$$x = a(2\cos t - \cos 2t),$$
$$y = a(2\sin t - \sin 2t).$$

7.8.9. Найти длину замкнутой кривой

$$x = 4\sqrt{2}\, a\sin t;\quad y = a\sin 2t.$$

7.8.10. Найти длину дуги эволюты эллипса

$$x = \frac{c^2}{a}\cos^3 t,\qquad y = -\frac{c^2}{b}\sin^3 t,\quad c^2 = a^2 - b^2.$$

7.8.11. Вычислить длину дуги кривой

$$x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t,$$
$$y = (2 - t^2)\cos t + 2t\sin t$$

от $t_1 = 0$ до $t_2 = \pi$.

7.8.12. На циклоиде $x = a(t - \sin t)$; $y = a(1 - \cos t)$ найти точку, которая делит первую арку циклоиды по длине в отношении $1:3$.

§ 7.9. Вычисление длин дуг кривых, заданных в полярных координатах

Если гладкая кривая задана уравнением $\rho = \rho(\varphi)$ в полярных координатах, то длина дуги l кривой выражается интегралом:

$$l = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho^2 + \rho_\varphi'^2}\, d\varphi,$$

где φ_1 и φ_2 — значения полярного угла φ в концах дуги ($\varphi_1 < \varphi_2$).

7.9.1. Найти длину первого витка архимедовой спирали $\rho = a\varphi$.

Решение. Первый виток архимедовой спирали образуется при изменении полярного угла φ от 0 до 2π. Поэтому

$$l = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{a^2\varphi^2 + a^2}\, d\varphi = a\int\limits_0^{2\pi} \sqrt{\varphi^2 + 1}\, d\varphi =$$
$$= a\left[\pi\sqrt{4\pi^2 + 1} + \frac{1}{2}\ln\left(2\pi + \sqrt{4\pi^2 + 1}\right)\right].$$

7.9.2. Вычислить длину логарифмической спирали $\rho = ae^{m\varphi}$ от некоторой ее точки (ρ_0, φ_0) до переменной точки (ρ, φ).

Решение. В этом случае (независимо от того, какая из величин ρ и ρ_0 больше!)

$$l = \left|\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi} \sqrt{a^2e^{2m\varphi} + a^2m^2e^{2m\varphi}}\, d\varphi\right| =$$
$$= a\sqrt{1 + m^2}\left|\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi} e^{m\varphi}\, d\varphi\right| = a\,\frac{\sqrt{1 + m^2}}{m}\,\left|e^{m\varphi} - e^{m\varphi_0}\right| =$$
$$= \frac{\sqrt{1 + m^2}}{m}\,|\rho - \rho_0| = \frac{\sqrt{1 + m^2}}{m}\,|\Delta\rho|,$$

т. е. длина дуги логарифмической спирали пропорциональна приращению полярного радиуса дуги.

7.9.3. Найти длину дуги кардиоиды $\rho = a(1+\cos\varphi)$ $(a>0,\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi)$.

Решение. Здесь $\rho'_\varphi = -a\sin\varphi$,

$$\sqrt{\rho_\varphi'^2+\rho^2}=\sqrt{2a^2(1+\cos\varphi)}=\sqrt{4a^2\cos^2(\varphi/2)}=$$
$$=2a\,|\cos(\varphi/2)|=\begin{cases} 2a\cos(\varphi/2), & 0\leqslant\varphi\leqslant\pi,\\ -2a\cos(\varphi/2), & \pi\leqslant\varphi\leqslant 2\pi.\end{cases}$$

Следовательно, в силу симметрии,

$$l=2a\int_0^{2\pi}\left|\cos\frac{\varphi}{2}\right|d\varphi=4a\int_0^{\pi}\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi=8a.$$

7.9.4. Найти длину дуги лемнискаты $\rho^2=2a^2\cos 2\varphi$ от правой вершины, отвечающей $\varphi=0$, до любой точки с полярным углом $\varphi<\pi/4$.

Решение. Если $0\leqslant\varphi<\pi/4$, то $\cos 2\varphi>0$. Поэтому

$$\rho=a\sqrt{2\cos 2\varphi};\qquad \rho'_\varphi=-\frac{a\sqrt{2}\sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}};$$

$$\sqrt{\rho^2+\rho_\varphi'^2}=\sqrt{2a^2\left(\cos 2\varphi+\frac{\sin^2 2\varphi}{\cos 2\varphi}\right)}=\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{\cos 2\varphi}}.$$

Следовательно,

$$l=a\sqrt{2}\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}=a\sqrt{2}\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-2\sin^2\varphi}}.$$

Последний интеграл называется *эллиптическим интегралом первого рода* и его можно привести к виду, удобному для вычисления с помощью специальных таблиц.

7.9.5. Вычислить длину дуги кривой $\rho=a\sin^3(\varphi/3)$.

7.9.6. Вычислить длину отрезка прямой линии

$$\rho=a\sec(\varphi-\pi/3)$$

от точки $\varphi=0$ до точки $\varphi=\pi/2$.

Решение. $\rho'_\varphi=a\sec(\varphi-\pi/3)\operatorname{tg}(\varphi-\pi/3)$;

$$\sqrt{\rho^2+\rho_\varphi'^2}=a\sec(\varphi-\pi/3)\sqrt{1+\operatorname{tg}^2(\varphi-\pi/3)}=a\sec^2(\varphi-\pi/3).$$

(Знак модуля у функции $\sec(\varphi-\pi/3)$ опущен, так как на отрезке $[0,\ \pi/2]$ эта функция положительна.)

$$l=a\int_0^{\pi/2}\sec^2(\varphi-\pi/3)\,d\varphi=\frac{4\sqrt{3}}{3}a.$$

7.9.7. Вычислить длину замкнутой кривой $\rho = a\sin^4(\varphi/4)$.

Решение. Так как функция $\rho = a\sin^4(\varphi/4)$ — четная, то заданная кривая симметрична относительно полярной оси. Так как функ-

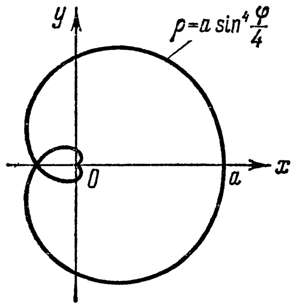

Рис. 99.

ция $\sin^4(\varphi/4)$ имеет период 4π, то за половину периода от 0 до 2π полярный радиус возрастает от 0 до a и опишет половину кривой в силу ее симметрии (рис. 99).

Далее $\rho'_\varphi = a\sin^3(\varphi/4)\cos(\varphi/4)$ и

$$\sqrt{\rho^2 + \rho_\varphi'^2} = \sqrt{a^2\sin^8(\varphi/4) + a^2\sin^6(\varphi/4)\cos^2(\varphi/4)} = a\sin^3(\varphi/4),$$

если $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$.

Следовательно,

$$l = 2a\int_0^{2\pi} \sin^3(\varphi/4)\,d\varphi = 8a\int_0^{\pi/2} \sin^3 t\,dt = \frac{16}{3}a \qquad (\varphi = 4t).$$

7.9.8. Вычислить длину дуги кривой $\varphi = (1/2)(\rho + 1/\rho)$ от $\rho = 2$ до $\rho = 4$.

Решение. Дифференциал дуги dl равен

$$dl = \sqrt{\rho^2 + \rho_\varphi'^2}\,d\varphi = \sqrt{\rho^2 d\varphi^2 + d\rho^2} = \sqrt{\rho^2\left(\frac{d\varphi}{d\rho}\right)^2 + 1}\,d\rho.$$

Из уравнения кривой находим $\frac{d\varphi}{d\rho} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\rho^2}\right)$. Следовательно,

$$l = \int_2^4 \sqrt{\rho^2 \cdot \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{\rho^2}\right)^2 + 1}\,d\rho = \int_2^4 \sqrt{\frac{1}{4}\left(\rho^2 - 2 + \frac{1}{\rho^2} + 4\right)}\,d\rho =$$

$$= \frac{1}{2}\int_2^4 \sqrt{\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)^2}\,d\rho = \frac{1}{2}\left(\frac{\rho^2}{2} + \ln\rho\right)\Bigg|_2^4 = 3 + \frac{\ln 2}{2}.$$

7.9.9. Вычислить длину гиперболической спирали $\rho\varphi = 1$ от $\varphi_1 = 3/4$ до $\varphi_2 = 4/3$.

7.9.10. Вычислить длину замкнутой кривой $\rho = 2a(\sin\varphi + \cos\varphi)$.

7.9.11. Вычислить длину дуги кривой $\rho = p/(1+\cos\varphi)$ от $\varphi_1 = -\pi/2$ до $\varphi_2 = \pi/2$.

§ 7.10. Вычисление площади поверхности вращения

Площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox дуги L кривой $y = y(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$, выражается интегралом

$$P = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx,$$

который удобно записывать в форме $P = 2\pi \int\limits_L y\,dl$, где dl — дифференциал длины дуги.

Если кривая задана параметрически или в полярных координатах, то достаточно произвести замену переменной в приведенной формуле, выразив соответствующим образом дифференциал длины дуги (см. § 7.8 и 7.9).

7.10.1. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением астроиды $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ вокруг оси Ox.

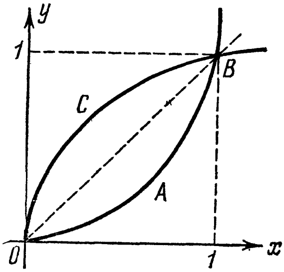

Рис. 100.

Решение. Дифференцируя уравнение астроиды, получаем

$$\frac{2}{3}x^{-1/3} + \frac{2}{3}y^{-1/3}y' = 0,$$

откуда $y' = -\dfrac{y^{1/3}}{x^{1/3}}$.

Далее, $\sqrt{1+y'^2} = \sqrt{1+\dfrac{y^{2/3}}{x^{2/3}}} = \dfrac{a^{1/3}}{|x|^{1/3}}$. Так как астроида симметрична относительно оси Oy, то при вычислении площади поверхности можно сначала считать $x \geqslant 0$, а затем результат удвоить. Другими словами, искомая площадь P равна

$$P = 2\cdot 2\pi \int_0^a y\sqrt{1+y'^2}\,dx = 4\pi \int_0^a (a^{2/3} - x^{2/3})^{3/2} a^{1/3} x^{-1/3}\,dx.$$

Заменим

$$a^{2/3} - x^{2/3} = t^2,$$
$$-\frac{2}{3}x^{-1/3}dx = 2t\,dt,$$

x	t
0	$a^{1/3}$
a	0

Тогда $P = 12\pi a^{1/3} \int\limits_0^{a^{1/3}} t^4\,dt = \dfrac{12}{5}\pi a^2$.