7.9.10. Вычислить длину замкнутой кривой $\rho = 2a(\sin\varphi + \cos\varphi)$.

7.9.11. Вычислить длину дуги кривой $\rho = p/(1+\cos\varphi)$ от $\varphi_1 = -\pi/2$ до $\varphi_2 = \pi/2$.

§ 7.10. Вычисление площади поверхности вращения

Площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox дуги L кривой $y = y(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$, выражается интегралом

$$P = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx,$$

который удобно записывать в форме $P = 2\pi \int_L y\,dl$, где dl — дифференциал длины дуги.

Если кривая задана параметрически или в полярных координатах, то достаточно произвести замену переменной в приведенной формуле, выразив соответствующим образом дифференциал длины дуги (см. § 7.8 и 7.9).

7.10.1. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением астроиды $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ вокруг оси Ox.

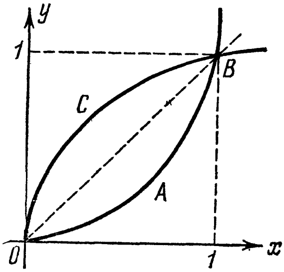

Рис. 100.

Решение. Дифференцируя уравнение астроиды, получаем

$$\frac{2}{3}x^{-1/3} + \frac{2}{3}y^{-1/3}y' = 0,$$

откуда $y' = -\dfrac{y^{1/3}}{x^{1/3}}$.

Далее, $\sqrt{1+y'^2} = \sqrt{1+\dfrac{y^{2/3}}{x^{2/3}}} = \dfrac{a^{1/3}}{|x|^{1/3}}$. Так как астроида симметрична относительно оси Oy, то при вычислении площади поверхности можно сначала считать $x \geqslant 0$, а затем результат удвоить. Другими словами, искомая площадь P равна

$$P = 2\cdot 2\pi \int_0^a y\sqrt{1+y'^2}\,dx = 4\pi \int_0^a (a^{2/3} - x^{2/3})^{3/2} a^{1/3} x^{-1/3}\,dx.$$

Заменим

$$a^{2/3} - x^{2/3} = t^2,$$
$$-\frac{2}{3}x^{-1/3}dx = 2t\,dt,$$

x	t
0	$a^{1/3}$
a	0

Тогда $P = 12\pi a^{1/3} \int_0^{a^{1/3}} t^4\,dt = \dfrac{12}{5}\pi a^2$.

7.10.2. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox замкнутого контура $OABCO$, образованного кривыми $y=x^2$ и $x=y^2$ (рис. 100).

Решение. Заданные параболы, как легко проверить, пересекаются в точках $O(0, 0)$ и $B(1, 1)$. Искомая площадь $P=P_1+P_2$, где площадь P_1 образована вращением дуги OCB, а P_2—вращением дуги OAB.

Вычислим площадь P_1. Из уравнения $x=y^2$ получаем $y=\sqrt{x}$ и $y'=1/(2\sqrt{x})$. Следовательно,

$$P_1=2\pi\int_0^1\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{4x}}\,dx=2\pi\int_0^1\frac{\sqrt{4x+1}}{2}\,dx=$$
$$=\frac{\pi}{6}(4x+1)^{3/2}\Big|_0^1=\frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1).$$

Вычислим теперь площадь P_2. Имеем $y=x^2$, $y'=2x$ и

$$P_2=2\pi\int_0^1 x^2\sqrt{1+4x^2}\,dx.$$

Замена $x=(1/2)\operatorname{sh}t$, $dx=(1/2)\operatorname{ch}t\,dt$ дает

$$P_2=\frac{\pi}{4}\int_0^{\operatorname{Arsh}2}\operatorname{sh}^2t\operatorname{ch}^2t\,dt=\frac{\pi}{32}\left(\frac{1}{4}\operatorname{sh}4t-t\right)\Big|_0^{\operatorname{Arsh}2}=$$
$$=\frac{9\sqrt{5}\pi}{16}-\frac{1}{32}\pi\ln(2+\sqrt{5}).$$

Таким образом,

$$P=P_1+P_2=\frac{(5\sqrt{5}-1)\pi}{6}+\frac{9\sqrt{5}\pi}{16}-\frac{1}{32}\pi\ln(2+\sqrt{5})=$$
$$=\frac{67\sqrt{5}\pi}{48}-\frac{\pi}{32}\ln(2+\sqrt{5})-\frac{\pi}{6}.$$

7.10.3. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением:

а) части кривой $y=x^2/2$, отсеченной прямой $y=3/2$, вокруг оси Oy;

б) части кривой $y^2=4+x$, отсеченной прямой $x=2$, вокруг оси Ox.

7.10.4. Вычислить площадь поверхности эллипсоида, образованного вращением эллипса $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ вокруг оси Ox $(a>b)$.

Решение. Разрешая уравнение эллипса относительно y, для $y\geqslant 0$ получим

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2};\quad y'=-\frac{b}{a}\cdot\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}};$$
$$\sqrt{1+y'^2}=\sqrt{\frac{a^4-(a^2-b^2)x^2}{a^2(a^2-x^2)}}.$$

Отсюда

$$P=2\pi\int_{-a}^{a}\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\sqrt{\frac{a^4-(a^2-b^2)x^2}{a^2(a^2-x^2)}}\,dx=$$

$$=\frac{4\pi b}{a}\int_{0}^{a}\sqrt{a^2-\varepsilon^2x^2}\,dx=2\pi ab\left(\sqrt{1-\varepsilon^2}+\frac{\arcsin\varepsilon}{\varepsilon}\right),$$

где величина $\varepsilon=\sqrt{(a^2-b^2)/a^2}=c/a$ есть эксцентриситет эллипса.

В частности, при $b\to a$ эксцентриситет ε стремится к нулю и

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\arcsin\varepsilon}{\varepsilon}=1;$$

так как при этом эллипс превращается в окружность, то в пределе получаем площадь поверхности шара (сферы):

$$P=4\pi a^2.$$

7.10.5. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением эллипса $4x^2+y^2=4$ вокруг оси Oy.

7.10.6. Дуга цепной линии

$$y=\frac{a}{2}\left(e^{x/a}+e^{-x/a}\right)=a\operatorname{ch}\frac{x}{a},$$

концы которой имеют абсциссы 0 и x, вращается вокруг оси Ox.

Показать, что площадь поверхности P и объем V образуемого при этом тела связаны соотношением $P=2V/a$.

Решение. Так как $y'=\operatorname{sh}(x/a)$, то $\sqrt{1+y'^2}=\operatorname{ch}(x/a)$. Поэтому

$$P=2\pi\int_{0}^{x}y\sqrt{1+y'^2}\,dx=2a\pi\int_{0}^{x}\operatorname{ch}^2\frac{x}{a}\,dx=\frac{2}{a}\pi\int_{0}^{x}a^2\operatorname{ch}^2\frac{x}{a}\,dx,$$

но

$$\pi\int_{0}^{x}a^2\operatorname{ch}^2\frac{x}{a}\,dx=\pi\int_{0}^{x}y^2\,dx=V,$$

значит, $P=2V/a$, что и требовалось доказать.

7.10.7. Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Oy петли кривой $9ax^2=y(3a-y)^2$.

Решение. Петля описывается текущей точкой при изменении y от 0 до $3a$. Продифференцируем по y обе части уравнения кривой:

$$18axx'=(3a-y)^2-2y(3a-y)=3(3a-y)(a-y).$$

Отсюда $xx'=(3a-y)(a-y)/6a$. Применяя формулу для вычисления площади поверхности тела вращения вокруг оси Oy, будем иметь

$$P=2\pi\int\limits_{y_1}^{y_2} x\sqrt{1+x'^2}\,dy=2\pi\int\limits_{y_1}^{y_2}\sqrt{x^2+(xx')^2}\,dy=$$

$$=2\pi\int\limits_0^{3a}\sqrt{\frac{y(3a-y)^2}{9a}+\frac{(3a-y)^2(a-y)^2}{36a^2}}\,dy=\frac{\pi}{3a}\int\limits_0^{3a}(3a^2+2ay-y^2)\,dy=$$

$$=3\pi a^2.$$

7.10.8. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox кривой $8y^2=x^2-x^4$.

7.10.9. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox дуги кривой $x=t^2$; $y=(t/3)(t^2-3)$, заключенной между точками пересечения ее с осью Ox.

Решение. Полагая $y=0$, находим $t_1=0$ и $t_{2,3}=\pm\sqrt{3}$ и, следовательно, $x_1=0$ и $x_{2,3}=3$. Отсюда следует, что кривая пересекает ось Ox в двух точках, (0, 0) и (3, 0). При изменении знака параметра t функция $x(t)$ знака не меняет, а функция $y(t)$ меняет знак. Это означает, что кривая симметрична относительно оси Ox (рис. 101).

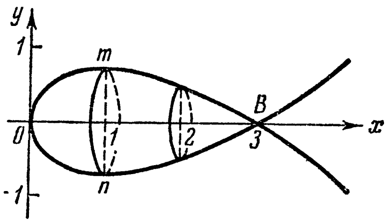

Рис. 101.

Для нахождения площади поверхности достаточно ограничиться нижней частью кривой OnB, соответствующей изменению параметра от 0 до $+\sqrt{3}$. Дифференцируя по t, находим

$$x'_t=2t;\qquad y'_t=t^2-1$$

и дифференциал длины дуги

$$dl=\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}\,dt=(1+t^2)\,dt.$$

Следовательно,

$$P=2\pi\int\limits_{t_1}^{t_2}|y(t)|\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}\,dt=$$

$$=2\pi\int\limits_0^{\sqrt{3}}-\frac{t}{3}(t^2-3)(1+t^2)\,dt=-\frac{2}{3}\pi\int\limits_0^{\sqrt{3}}(t^5-2t^3-3t)\,dt=3\pi.$$

7.10.10. Вычислить площадь поверхности тора, образованного вращением окружности $x^2+(y-b)^2=r^2$ $(0<r<b)$ вокруг оси Ox.

Решение. Запишем уравнение окружности в параметрической форме: $x=r\cos t$; $y=b+r\sin t$.

Отсюда

$$x'_t = -r\sin t;\ y'_t = r\cos t.$$

Искомая площадь P равна

$$P = 2\pi\int_0^{2\pi}(b + r\sin t)\sqrt{(-r\sin t)^2 + (r\cos t)^2}\,dt =$$

$$= 2\pi r\int_0^{2\pi}(b + r\sin t)\,dt = 4\pi^2 br.$$

7.10.11. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением лемнискаты $\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$ вокруг полярной оси.

Решение. Действительные значения для ρ получаются при $\cos 2\varphi \geqslant 0$, т. е. при $-\pi/4 \leqslant \varphi \leqslant \pi/4$ (правая ветвь лемнискаты) или при $(3/4)\pi \leqslant \varphi \leqslant (5/4)\pi$ (левая ветвь лемнискаты).

Дифференциал длины дуги лемнискаты равен

$$dl = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\,d\varphi = \sqrt{a^2\cos 2\varphi + \left(\frac{a\sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\right)^2}\,d\varphi = \frac{a\,d\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}.$$

Кроме того, $y = \rho\sin\varphi = a\sin\varphi\sqrt{\cos 2\varphi}$.

Искомая площадь поверхности P равна удвоенной площади поверхности, образуемой вращением правой дуги. Поэтому

$$P = 2\cdot 2\pi\int_L y\,dl = 4\pi a^2\int_0^{\pi/4}\frac{\sqrt{\cos 2\varphi}\sin\varphi\,d\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}} = 2\pi a^2\left(2 - \sqrt{2}\right).$$

7.10.12. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением четверти окружности $x^2 + y^2 = a^2$ от точки $A(a,\ 0)$ до точки $B(0,\ a)$ вокруг прямой $x + y = a$.

Решение. Найдем расстояние MN текущей точки $M(x,\ y)$, лежащей на окружности $x^2 + y^2 = a^2$, до прямой $x + y = a$:

$$MN = \frac{\left|x + \sqrt{a^2 - x^2} - a\right|}{\sqrt{2}} = \frac{x + \sqrt{a^2 - x^2} - a}{\sqrt{2}},$$

так как для точек окружности, лежащих в первой четверти, $x + y \geqslant a$. Далее,

$$dl = \sqrt{1 + y'^2}\,dx = \sqrt{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}\right)^2}\,dx = \frac{a\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Следовательно,

$$P = 2\pi\int_0^a \frac{x + \sqrt{a^2 - x^2} - a}{\sqrt{2}}\cdot\frac{a\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} =$$

$$= \sqrt{2}\,\pi a\left[-\sqrt{a^2 - x^2} + x - a\arcsin\frac{x}{a}\right]_0^a = \frac{\pi a^2}{\sqrt{2}}(4 - \pi).$$

7.10.13. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением одной ветви лемнискаты $\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$ вокруг прямой $\varphi = \pi/4$.

Решение. Из треугольника OMN (рис. 102) находим расстояние MN произвольной точки M правой ветви от оси вращения $\varphi = \pi/4$:

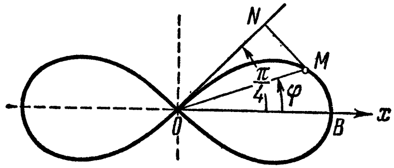

Рис. 102.

$$MN = \rho \sin(\pi/4 - \varphi) =$$
$$= a\sqrt{\cos 2\varphi}\,\sin(\pi/4 - \varphi);$$

далее

$$dl = \frac{a\,d\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}.$$

Поэтому $P = 2\pi \int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} a\sqrt{\cos 2\varphi}\,\sin\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right)\frac{a\,d\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}} = 2\pi a^2.$

7.10.14. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox дуги кривой $y = x^3/3$ от $x = -2$ до $x = 2$.

7.10.15. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением одной полуволны кривой $y = \sin x$ вокруг оси Ox.

7.10.16. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Oy дуги параболы $x^2 = 4ay$, заключенной между точками пересечения ее с прямой $y = 3a$.

7.10.17. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением дуги кривой $x = e^t \sin t$; $y = e^t \cos t$ вокруг оси Ox от $t = 0$ до $t = \pi/2$.

7.10.18. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox дуги кривой

$$x = t^3/3; \qquad y = 4 - t^2/2,$$

заключенной между точками пересечения ее с осями координат.

7.10.19. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением кривой $\rho = 2a \sin\varphi$ вокруг полярной оси.

7.10.20. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox кардиоиды

$$x = a(2\cos t - \cos 2t),$$
$$y = a(2\sin t - \sin 2t).$$

§ 7.11. Смешанные задачи на геометрические приложения определенного интеграла

7.11.1. Дана циклоида (рис. 103)

$$x = a(t - \sin t); \quad y = a(1 - \cos t); \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$$

Вычислить:

а) площади поверхностей, образованных вращением дуги OBA вокруг оси Ox и вокруг оси Oy;

б) объемы тел, образованных вращением фигуры $OBAO$ вокруг оси Oy и вокруг оси BC;