**7.10.13.** Вычислить площадь поверхности, образованной вращением одной ветви лемнискаты $\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$ вокруг прямой $\varphi = \pi/4$.

Решение. Из треугольника $OMN$ (рис. 102) находим расстояние $MN$ произвольной точки $M$ правой ветви от оси вращения $\varphi = \pi/4$:

$$MN = \rho \sin(\pi/4 - \varphi) = a\sqrt{\cos 2\varphi}\,\sin(\pi/4 - \varphi);$$

далее

$$dl = \frac{a\,d\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}.$$

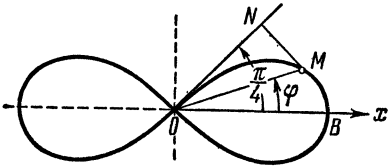


Рис. 102.

Поэтому $P = 2\pi \int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} a\sqrt{\cos 2\varphi}\,\sin\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right) \frac{a\,d\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}} = 2\pi a^2.$

**7.10.14.** Вычислить площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси $Ox$ дуги кривой $y = x^3/3$ от $x = -2$ до $x = 2$.

**7.10.15.** Вычислить площадь поверхности, образованной вращением одной полуволны кривой $y = \sin x$ вокруг оси $Ox$.

**7.10.16.** Вычислить площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси $Oy$ дуги параболы $x^2 = 4ay$, заключенной между точками пересечения ее с прямой $y = 3a$.

**7.10.17.** Вычислить площадь поверхности, образованной вращением дуги кривой $x = e^t \sin t$; $y = e^t \cos t$ вокруг оси $Ox$ от $t = 0$ до $t = \pi/2$.

**7.10.18.** Вычислить площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси $Ox$ дуги кривой

$$x = t^3/3; \qquad y = 4 - t^2/2,$$

заключенной между точками пересечения ее с осями координат.

**7.10.19.** Вычислить площадь поверхности, образованной вращением кривой $\rho = 2a \sin \varphi$ вокруг полярной оси.

**7.10.20.** Вычислить площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси $Ox$ кардиоиды

$$x = a(2\cos t - \cos 2t),$$
$$y = a(2\sin t - \sin 2t).$$

## § 7.11. Смешанные задачи на геометрические приложения определенного интеграла

**7.11.1.** Дана циклоида (рис. 103)

$$x = a(t - \sin t); \quad y = a(1 - \cos t); \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$$

Вычислить:

а) площади поверхностей, образованных вращением дуги $OBA$ вокруг оси $Ox$ и вокруг оси $Oy$;

б) объемы тел, образованных вращением фигуры $OBAO$ вокруг оси $Oy$ и вокруг оси $BC$;

в) площадь поверхности, образованной вращением дуги $BA$ вокруг оси $BC$;

г) объем тела, образованного вращением фигуры $ODBEABO$ вокруг касательной $DE$ в вершине $B$;

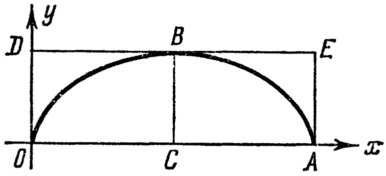


Рис. 103.

д) площадь поверхности, образуемой при этом дугой циклоиды.

Решение. а) При вращении вокруг оси $Ox$ площадь поверхности

$$P_x = 2\pi \int_L y\, dl = 2\pi \int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\, 2a \sin\frac{t}{2}\, dt = 8a^2\pi \int_0^{2\pi} \sin^3\frac{t}{2}\, dt = \frac{64\pi a^2}{3}.$$

При вращении вокруг оси $Oy$ площадь поверхности

$$P_y = 2\pi \int_L x\, dl = 4\pi a^2 \int_0^{\pi} (t - \sin t) \sin\frac{t}{2}\, dt +$$

$$+ 4\pi a^2 \int_{\pi}^{2\pi} (t - \sin t) \sin\frac{t}{2}\, dt = 4\pi a^2 \int_0^{2\pi} (t - \sin t) \sin\frac{t}{2}\, dt = 16\pi^2 a^2.$$

б) При вращении вокруг оси $Oy$ получаем объем

$$V_y = \pi \int_0^{2a} (x_2^2 - x_1^2)\, dy = \pi \int_0^{2a} x_2^2\, dy - \pi \int_0^{2a} x_1^2\, dy,$$

где $x = x_1(y)$ — уравнение кривой $BA$, $x = x_2(y)$ — уравнение кривой $OB$.

Производя замену $y = a(1-\cos t)$, надо учесть, что для первого интеграла $t$ меняется от $2\pi$ до $\pi$, а для второго интеграла $t$ меняется от 0 до $\pi$. Следовательно,

$$V_y = \pi \int_{2\pi}^{\pi} a^2 (t - \sin t)^2 a \sin t\, dt - \pi \int_0^{\pi} a^2 (t - \sin t)^2 a \sin t\, dt =$$

$$= \pi a^3 \int_{2\pi}^{0} (t - \sin t)^2 \sin t\, dt =$$

$$= \pi a^3 \left[ \int_{2\pi}^{0} t^2 \sin t\, dt - \int_{2\pi}^{0} t(1 - \cos 2t)\, dt + \int_{2\pi}^{0} \sin^3 t\, dt \right] = 6\pi^3 a^3.$$

Для вычисления объема тела, получающегося при вращении вокруг оси $BC$, удобно сначала перенести начало координат в точку $C$, что дает в новых координатах уравнения

$$x' = a(t - \pi - \sin t); \quad y' = a(1 - \cos t).$$

Учитывая лишь дугу $BA$, получим

$$V = \pi \int_0^{2a} x'^2\, dy' = \pi a^3 \int_{2\pi}^{\pi} (t - \pi - \sin t)^2 \sin t\, dt.$$

Полагая $t - \pi = z$, получим

$$V = -\pi a^3 \int_{\pi}^{0} (z + \sin z)^2 \sin z\, dz = \pi a^3 \int_0^{\pi} (z + \sin z)^2 \sin z\, dz =$$

$$= \frac{\pi a^3}{6}(9\pi^2 - 16).$$

в) Совершая указанный выше перенос начала, получим

$$dl = 2a \sin(t/2)\,|dt| = -2a \sin(t/2)\, dt.$$

Поэтому

$$P = \int_0^{2a} 2\pi x\, dl = -4\pi a^2 \int_{2\pi}^{\pi} (t - \pi - \sin t) \sin\frac{t}{2}\, dt =$$

$$= 4\pi a^2 \int_0^{\pi} (z + \sin z) \cos\frac{z}{2}\, dz = 4\left(2\pi - \frac{8}{3}\right)\pi a^2.$$

г) Перенося начало координат в точку $B$ и изменяя направление оси $Oy$, получим

$$x' = a(t - \pi - \sin t), \qquad y' = a(1 + \cos t).$$

Полагая $t - \pi = z$, имеем

$$x' = a(z + \sin z), \qquad y' = a(1 - \cos z),$$

причем для дуги $OBA$ величина $z$ меняется от $-\pi$ до $\pi$. Следовательно,

$$V = \pi \int_{-\pi}^{\pi} a^3 (1 - \cos z)^2 (1 + \cos z)\, dz = \pi^2 a^3.$$

д) $$P = 2\pi \int_{-\pi}^{\pi} y\, dl = 4\pi a^2 \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos z) \cos\frac{z}{2}\, dz = \frac{32}{3}\pi a^2.$$

**7.11.2.** Найти объем тела, ограниченного поверхностями $z^2 = 8(2 - x)$ и $x^2 + y^2 = 2x$.

Решение. Первая поверхность есть параболический цилиндр с образующими, параллельными оси $Oy$, и с направляющей $z^2 = 8(2 - x)$

в плоскости $xOz$, а вторая — круговой цилиндр с образующими, параллельными оси $Oz$, и с направляющей $x^2+y^2=2x$ в плоскости $xOy$.

Объем $V$ вычислим по формуле $V=\int\limits_0^2 S(x)\,dx$. $S(x)$ представляет собой площадь прямоугольника, основание которого равно $2y$, а высота $2z$:

$$S(x)=2y\cdot 2z=4\sqrt{2x-x^2}\sqrt{8(2-x)}.$$

Следовательно,

$$V=\int\limits_0^2 4\sqrt{x(2-x)8(2-x)}\,dx=4\sqrt{8}\int\limits_0^2(2-x)\sqrt{x}\,dx=$$

$$=4\sqrt{8}\left(\frac{2}{3}2\sqrt{x^3}-\frac{2}{5}\sqrt{x^5}\right)\Big|_0^2=\frac{256}{15}.$$

**7.11.3.** Доказать, что если фигура $S$ ограничена простым выпуклым контуром и заключена между ординатами $y_1$ и $y_2$ (рис. 104), то объем тела вращения этой фигуры вокруг оси $Ox$ можно выразить формулой

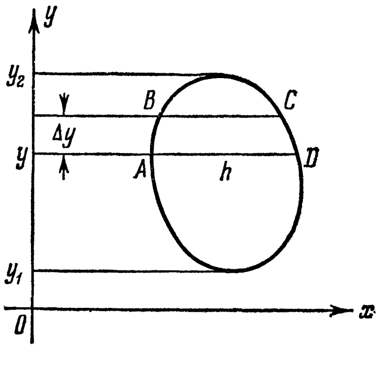

Рис. 104.

$$V=2\pi\int\limits_{y_1}^{y_2} yh\,dy,$$

где

$$h=x_2(y)-x_1(y),$$

$x=x_1(y)$ — уравнение левой части контура, $x=x_2(y)$ — уравнение правой части контура.

Решение. Пусть вращающаяся фигура $S$ ограничена простым выпуклым контуром и заключена между ординатами $y_1$ и $y_2$. Отрезок $[y_1, y_2]$ делим на части, через точки деления проводим прямые, параллельные оси вращения, разбивая фигуру $S$ на горизонтальные полоски. Выделяем одну полоску и заменяем ее прямоугольником $ABCD$, у которого нижнее основание равно хорде $AD=h$, соответствующей ординате $y$, а высота $AB=\Delta y$. Тело, образуемое вращением прямоугольника $ABCD$ вокруг оси $Ox$, есть полый цилиндр, объем которого приближенно можно принять за элемент объема

$$\Delta V\approx\pi(y+\Delta y)^2h-\pi y^2h=2\pi y\,\Delta y\,h+\pi h(\Delta y)^2.$$

Отбрасывая бесконечно малую второго порядка относительно $\Delta y$, получим главную часть или дифференциал объема

$$dV=2\pi yh\,dy.$$

Зная дифференциал объема, мы получаем сам объем интегрированием:

$$V=2\pi\int_{y_1}^{y_2} yh\,dy.$$

Таким образом, мы получим еще одну формулу для вычисления объема тела вращения.

**7.11.4.** Фигура, ограниченная параболой $y=2x^2+3$, осью $Ox$ и вертикалями $x=0$ и $x=1$, вращается вокруг оси $Oy$. Вычислить объем образованного тела вращения.

Решение. Разобьем площадь фигуры на элементарные полоски прямыми, параллельными оси $Oy$. Объем $\Delta V$ элементарного цилиндрика, получающегося при вращении одной полоски, равен

$$\Delta V=\pi(x+\Delta x)^2y-\pi x^2y=2\pi xy\,\Delta x+\pi y\,(\Delta x)^2,$$

где $\Delta x$ — ширина полоски.

Пренебрегая бесконечно малой второго порядка относительно $\Delta x$, получим дифференциал искомого объема

$$dV=2\pi xy\,dx.$$

Отсюда

$$V=\int_0^1 2\pi xy\,dx=2\pi\int_0^1 x\,(2x^2+3)\,dx=4\pi.$$

**7.11.5.** Вычислить площадь той части поверхности цилиндра

$$x^2+y^2=ax,$$

которая содержится внутри сферы

$$x^2+y^2+z^2=a^2.$$

Решение. Образующие цилиндра параллельны оси $Oz$, а направляющей служит окружность $(x-a/2)^2+y^2=a^2/4$ (на рис. 105 изображена четвертая часть искомой поверхности).

Изображенную на рис. 105 часть окружности разделим на небольшие дуги $\Delta l$.

Образующие, проходящие через точки деления, делят поверхность цилиндра на полоски.

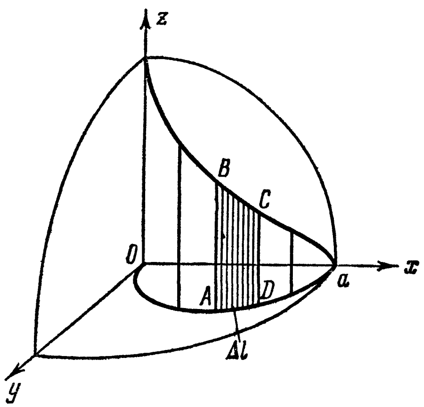


Рис. 105.

Если пренебречь бесконечно малыми высшего порядка, то площадь полоски $ABCD$ равна $CD\cdot\Delta l$.

Если $\rho$ и $\varphi$ — полярные координаты точки $D$, то $\rho=a\cos\varphi$ и $CD=\sqrt{a^2-\rho^2}=a\sin\varphi$, а $\Delta l=a\cdot\Delta\varphi$.

Отсюда находим дифференциал площади поверхности:

$$dP=a^2\sin\varphi\,d\varphi.$$

Значит,

$$P = 4 \int_0^{\pi/2} a^2 \sin\varphi \, d\varphi = 4a^2.$$

**7.11.6.** Вычислить площадь поверхности, отсекаемой от прямого кругового цилиндра плоскостью, проходящей через диаметр основания и наклоненной к основанию под углом 45°.

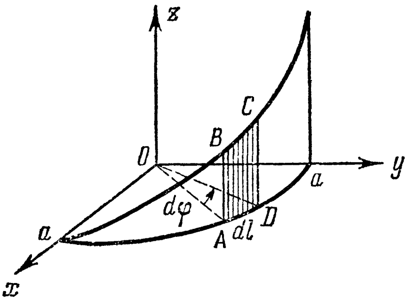


Рис. 106.

Решение. Примем ось цилиндра за ось $Oz$, а данный диаметр — за ось $Ox$. Тогда уравнение цилиндрической поверхности $x^2 + y^2 = a^2$, а уравнение плоскости, составляющей с координатной плоскостью $xOy$ угол в 45°, будет $y = z$.

Площадь бесконечно узкой полоски $ABCD$ (рис. 106) с точностью до бесконечно малых высшего порядка будет $dP = z\,dl$, где $dl$ — длина элементарной дуги окружности основания.

Вводя полярные координаты, получим

$$z = y = a \sin\varphi; \qquad dl = a\,d\varphi.$$

Отсюда $dP = a^2 \sin\varphi \, d\varphi$ и

$$P = a^2 \int_0^{\pi} \sin\varphi \, d\varphi = a^2 \left[-\cos\varphi\right]_0^{\pi} = 2a^2.$$

**7.11.7.** Оси двух круглых цилиндров с равными основаниями пересекаются под прямым углом.

Вычислить площадь поверхности тела, составляющего общую часть обоих цилиндров.

**7.11.8.** Вычислить объем тела, которое получается при вращении вокруг оси $Oy$ фигуры, ограниченной параболой $x^2 = y - 1$, осью абсцисс и прямыми $x = 0$ и $x = 1$.

**7.11.9.** Найти площадь $S$ эллипса, заданного уравнением

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 1 \qquad (\delta = AC - B^2 > 0;\ C > 0).$$

Решение. Решая уравнение относительно $y$, получим

$$y_1 = \frac{-Bx - \sqrt{C - \delta x^2}}{C}; \qquad y_2 = \frac{-Bx + \sqrt{C - \delta x^2}}{C},$$

причем значения $x$ должны удовлетворять неравенству

$$C - \delta x^2 \geqslant 0.$$

Решая это неравенство, получим пределы интегрирования:

$$-\sqrt{C/\delta} \leqslant x \leqslant \sqrt{C/\delta}.$$

Следовательно, искомая площадь равна

$$S=\int\limits_{-\sqrt{C/\delta}}^{\sqrt{C/\delta}}(y_2-y_1)\,dx=\frac{4}{C}\int\limits_{0}^{\sqrt{C/\delta}}\sqrt{C-\delta x^2}\,dx=\frac{\pi}{\sqrt{\delta}}.$$

**7.11.10.** Найти площади фигур, ограниченных кривыми, заданными параметрически:

а) $x=2t-t^2$; $y=2t^2-t^3$;

б) $x=t^2/(1+t^2)$; $y=t(1-t^2)/(1+t^2)$.

**7.11.11.** Найти площади фигур, ограниченных кривыми, заданными в полярных координатах:

а) $\rho=a\sin 3\varphi$ (трилистник); б) $\rho=\dfrac{p}{1-\cos\varphi}$ $[\pi/4\leqslant\varphi\leqslant\pi/2]$;

в) $\rho=3\sin\varphi$ и $\rho=\sqrt{3}\cos\varphi$.

**7.11.12.** Найти длину дуги кривой $y^2=\dfrac{4}{9}(2-x)^3$, отсеченной прямой $x=-1$.

**7.11.13.** Найти длину дуги $OA$ кривой

$$y=a\ln\frac{a^2}{a^2-x^2},$$

где $O(0,\ 0)$; $A(a/2, a\ln(4/3))$.

**7.11.14.** Вычислить длину дуги кривой $y^2=(2/3)(x-1)^3$, заключенной внутри параболы $y^2=x/3$.

**7.11.15.** Доказать, что длина эллипса

$$x=\sqrt{2}\sin t;\qquad y=\cos t$$

равна длине одной волны синусоиды $y=\sin x$.

**7.11.16.** Доказать, что дуга параболы $y=(1/2p)\,x^2$, соответствующая интервалу $0\leqslant x\leqslant a$, имеет ту же длину, что дуга спирали $\rho=P\varphi$, соответствующая интервалу $0\leqslant\rho\leqslant a$.

**7.11.17.** Найти отношение площади, ограниченной петлей кривой $y=\pm(1/3-x)\sqrt{x}$, к площади круга, длина окружности которого равна длине контура этой кривой.

**7.11.18.** Найти объем сегмента, отсекаемого от эллиптического параболоида $\dfrac{y^2}{2p}+\dfrac{z^2}{2q}=x$ плоскостью $x=a$.

**7.11.19.** Вычислить объем тела, ограниченного гиперболоидом

$$x^2/a^2+y^2/b^2-z^2/c^2=-1$$

и плоскостями $z=c$ и $z=l>c$.

**7.11.20.** Найти объем прямого эллиптического конуса, основание которого есть эллипс с полуосями $a$ и $b$, а высота равна $h$.

**7.11.21.** Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси $Ox$ фигуры, ограниченной прямыми: $y=x+1$; $y=2x+1$ и $x=2$.

**7.11.22.** Найти объем тела, полученного от вращения вокруг оси $Ox$ фигуры, ограниченной гиперболой $x^2/a^2-y^2/b^2=1$, прямой $2ay-bx=0$ и осью абсцисс.

**7.11.23.** Найти объем тела, образованного вращением кривой $\rho = a\cos^2\varphi$ вокруг полярной оси.

**7.11.24.** Найти площади поверхностей, образованных вращением следующих кривых:

а) $y = \operatorname{tg} x$ $(0 \leqslant x \leqslant \pi/4)$ вокруг оси $Ox$;

б) $y = x\sqrt{x/a}$ $(0 \leqslant x \leqslant a)$ вокруг оси $Ox$;

в) $x^2 + y^2 - 2rx = 0$ вокруг оси $Ox$ в пределах от 0 до $h$.

## § 7.12. Вычисление давления, работы и других физических величин

I. Сила давления жидкости $P$ на площадку $S$ с глубиной погружения $h$ по закону Паскаля равна $P = \gamma h S$, где $\gamma$ — удельный вес жидкости.

II. Если непрерывная переменная сила $X = f(x)$ действует в направлении оси $Ox$, то работа силы на отрезке $[x_1, x_2]$ выражается интегралом

$$A = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx.$$

III. Кинетическая энергия $K$ материальной точки массы $m$, обладающей скоростью $v$, выражается формулой $K = mv^2/2$.

IV. Электрические заряды отталкивают друг друга с силой $F = e_1e_2/r^2$, где $e_1$ и $e_2$ — величины зарядов, $r$ — расстояние между ними.

Замечание. При решении прикладных задач мы будем считать все данные выраженными в одной системе измерений и будем опускать наименования соответствующих величин.

**7.12.1.** Вычислить силу давления воды на вертикальную треугольную пластинку, имеющую основание $b$ и высоту $h$, погруженную в воду так, что ее вершина лежит на поверхности воды.

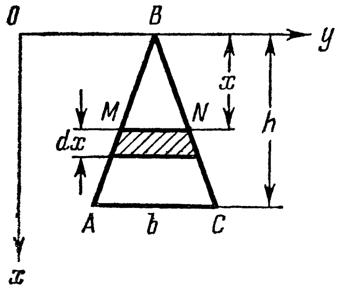

Рис. 107.

Решение. Введем систему координат так, как показано на рис. 107, и рассмотрим горизонтальную полоску, находящуюся на произвольной глубине $x$ и имеющую толщину, равную $dx$.

Приближенно принимая эту полоску за прямоугольник, находим дифференциал площади $dS = MN\,dx$. Из подобия треугольников $BMN$ и $ABC$ имеем $MN/b = x/h$.

Отсюда $MN = bx/h$ и $dS = (bx/h)\,dx$.

Сила давления воды на эту полоску с точностью до бесконечно малых высшего порядка равна $dP = x\,dS$ (учитывая, что удельный вес воды равен 1). Следовательно, сила давления воды на всю пластинку $ABC$ равна

$$P = \int_0^h x\,dS = \frac{b}{h}\int_0^h x^2\,dx = \frac{1}{3}bh^2.$$