7.11.23. Найти объем тела, образованного вращением кривой $\rho = a\cos^2\varphi$ вокруг полярной оси.

7.11.24. Найти площади поверхностей, образованных вращением следующих кривых:

а) $y = \operatorname{tg} x$ $(0 \leqslant x \leqslant \pi/4)$ вокруг оси Ox;

б) $y = x\sqrt{x/a}$ $(0 \leqslant x \leqslant a)$ вокруг оси Ox;

в) $x^2 + y^2 - 2rx = 0$ вокруг оси Ox в пределах от 0 до h.

§ 7.12. Вычисление давления, работы и других физических величин

I. Сила давления жидкости P на площадку S с глубиной погружения h по закону Паскаля равна $P = \gamma h S$, где γ — удельный вес жидкости.

II. Если непрерывная переменная сила $X = f(x)$ действует в направлении оси Ox, то работа силы на отрезке $[x_1, x_2]$ выражается интегралом

$$A = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx.$$

III. Кинетическая энергия K материальной точки массы m, обладающей скоростью v, выражается формулой $K = mv^2/2$.

IV. Электрические заряды отталкивают друг друга с силой $F = e_1e_2/r^2$, где e_1 и e_2 — величины зарядов, r — расстояние между ними.

Замечание. При решении прикладных задач мы будем считать все данные выраженными в одной системе измерений и будем опускать наименования соответствующих величин.

7.12.1. Вычислить силу давления воды на вертикальную треугольную пластинку, имеющую основание b и высоту h, погруженную в воду так, что ее вершина лежит на поверхности воды.

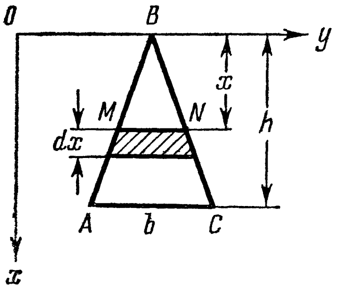

Рис. 107.

Решение. Введем систему координат так, как показано на рис. 107, и рассмотрим горизонтальную полоску, находящуюся на произвольной глубине x и имеющую толщину, равную dx.

Приближенно принимая эту полоску за прямоугольник, находим дифференциал площади $dS = MN\,dx$. Из подобия треугольников BMN и ABC имеем $MN/b = x/h$.

Отсюда $MN = bx/h$ и $dS = (bx/h)\,dx$.

Сила давления воды на эту полоску с точностью до бесконечно малых высшего порядка равна $dP = x\,dS$ (учитывая, что удельный вес воды равен 1). Следовательно, сила давления воды на всю пластинку ABC равна

$$P = \int_0^h x\,dS = \frac{b}{h}\int_0^h x^2\,dx = \frac{1}{3}bh^2.$$

7.12.2. Найти величину давления на полукруг, вертикально погруженный в жидкость, если его радиус равен R, а диаметр лежит на свободной поверхности жидкости (удельный вес жидкости равен γ).

7.12.3. Вертикальная плотина имеет форму трапеции, верхнее основание которой равно 70 *м*, нижнее 50 *м*, а высота 20 *м*. Найти силу давления воды на плотину (рис. 108).

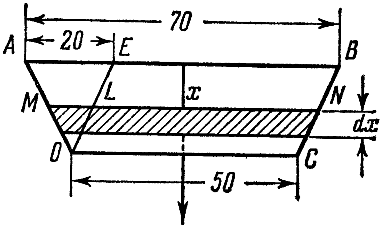

Рис. 108.

Решение. Дифференциал площади (dS) заштрихованной на рисунке области приближенно равен $dS = MN\,dx$. Учитывая подобие треугольников OML и OAE, находим $ML/20 = (20-x)/20$; отсюда $ML = 20-x$, $MN = 20-x+50 = 70-x$. Таким образом, $dS = MN\,dx = (70-x)\,dx$ и дифференциал силы давления воды равен

$$dP = x\,dS = x\,(70-x)\,dx.$$

Интегрируя по x в пределах от 0 до 20, получим

$$P = \int_0^{20} (70x - x^2)\,dx = 11333\,\frac{1}{3}.$$

7.12.4. Вычислить работу, которую нужно затратить на выкачивание воды из котла, имеющего форму полушара радиуса R.

7.12.5. Прямоугольный сосуд наполнен водой и маслом в равных по объему частях, причем масло вдвое легче воды. Показать, что сила давления смеси на боковую стенку уменьшится на одну пятую, если воду заменить маслом.

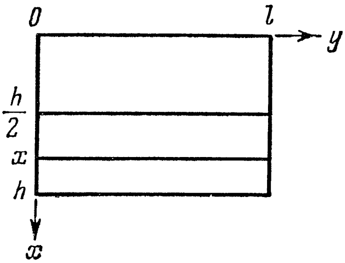

Рис. 109.

Решение. Пусть h — глубина сосуда, l — длина стенки. Введем систему координат так, как показано на рис. 109. Так как масло располагается над водой и занимает верхнюю половину сосуда, то сила давления масла на верхнюю половину стенки равна

$$P_1 = \frac{1}{2}\int_0^{h/2} xl\,dx = \frac{lh^2}{16}.$$

Давление на глубине $x > h/2$ слагается из давления столба масла высотой $h/2$ и столба воды высотой $x - h/2$ и потому

$$dP_2 = \left[\frac{h}{2}\cdot\frac{1}{2} + \left(x - \frac{h}{2}\right)\right] l\,dx = \left(x - \frac{h}{4}\right) l\,dx.$$

Следовательно, сила давления смеси на нижнюю половину стенки равна

$$P_2 = \int_{h/2}^{h} l\left(x - \frac{h}{4}\right) dx = \frac{lh^2}{4}.$$

Полное давление смеси на стенку равно

$$P = P_1 + P_2 = \frac{lh^2}{4} + \frac{lh^2}{16} = \frac{5}{16} lh^2.$$

Если бы сосуд был наполнен только маслом, то сила давления $\bar{P}$ на ту же стенку была бы равна

$$\bar{P} = \frac{1}{2}\int_0^h xl\,dx = \frac{lh^2}{4}.$$

Следовательно,

$$P - \bar{P} = \frac{1}{16} lh^2 = \frac{1}{5} P.$$

7.12.6. Электрический заряд E, сосредоточенный в начале координат, отталкивает заряд e из точки $(a, 0)$ в точку $(b, 0)$. Определить работу A силы отталкивания F.

Решение. Дифференциал работы силы на перемещении dx равен $dA = F\,dx = \frac{eE}{x^2}\,dx$.

Отсюда

$$A = eE\int_a^b \frac{dx}{x^2} = eE\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right).$$

При $b \to \infty$ работа A стремится к величине eE/a.

7.12.7. Определить работу, необходимую для запуска ракеты весом P с поверхности Земли вертикально вверх на высоту h.

Решение. Обозначим через F величину силы притяжения ракеты Землей. Пусть $m_{\text{Р}}$ — масса ракеты, $m_{\text{З}}$ — масса Земли. Согласно закону Ньютона

$$F = k\frac{m_{\text{Р}} m_{\text{З}}}{x^2},$$

где x — расстояние от ракеты до центра Земли. Полагая $km_{\text{Р}} m_{\text{З}} = K$, получим $F(x) = K/x^2$, $R \leqslant x \leqslant h + R$, R — радиус Земли. При $x = R$ сила $F(R)$ будет весом ракеты P, т. е. $F(R) = P = K/R^2$, откуда $K = PR^2$ и $F(x) = PR^2/x^2$.

Таким образом, дифференциал работы есть

$$dA = F(x)\,dx = \frac{PR^2}{x^2}\,dx.$$

Интегрируя, получим

$$A = \int_R^{R+h} F(x)\,dx = PR^2\int_R^{R+h}\frac{dx}{x^2} = \frac{PRh}{R+h}.$$

Предел

$$\lim_{h\to\infty} A(h)=\lim_{h\to\infty}\frac{PRh}{R+h}=PR$$

равен работе, которую должен совершить двигатель, чтобы полностью освободить ракету от земного притяжения (движение Земли при этом не учитывается).

7.12.8. Какую работу надо затратить, чтобы остановить железный шар радиуса R, вращающийся с угловой скоростью ω вокруг своего диаметра?

Решение. Количество необходимой работы равно кинетической энергии шара. Для подсчета этой энергии разобьем шар на концентрические полые цилиндры толщины dx; скорость точек такого цилиндра радиуса x есть ωx.

Дифференциал объема такого цилиндра равен $dV=4\pi x\sqrt{R^2-x^2}\,dx$, дифференциал массы $dM=\gamma\,dV$, где γ — плотность железа, дифференциал кинетической энергии $dK=2\pi\gamma\omega^2x^3\sqrt{R^2-x^2}\,dx$.

Отсюда

$$K=2\pi\gamma\omega^2\int_0^R x^3\sqrt{R^2-x^2}\,dx=\frac{4\pi\gamma R^3}{3}\cdot\frac{\omega^2R^2}{5}=\frac{M\omega^2R^2}{5}.$$

7.12.9. Вычислить кинетическую энергию диска массы M и радиуса R, вращающегося с угловой скоростью ω около оси, проходящей через его центр перпендикулярно к его плоскости.

7.12.10. Найти количество тепла, выделяемое переменным синусоидальным током

$$I=I_0\sin\left(\frac{2\pi}{T}t-\varphi\right)$$

в течение периода T в проводнике с сопротивлением R.

Решение. Для постоянного тока количество тепла в единицу времени определяется законом Джоуля—Ленца

$$Q=0{,}24I^2R.$$

При переменном токе дифференциал количества тепла равен $dQ=0{,}24I^2(t)R\,dt$, откуда

$$Q=0{,}24R\int_{t_1}^{t_2} I^2\,dt.$$

В нашем случае

$$Q=0{,}24RI_0^2\int_0^T\sin^2\left(\frac{2\pi}{T}t-\varphi\right)dt=$$

$$=0{,}12RI_0^2\left[t-\frac{T}{2\pi}\frac{\sin 2\left(\frac{2\pi}{T}t-\varphi\right)}{2}\right]\Bigg|_0^T=0{,}12RTI_0^2.$$

7.12.11. Вычислить силу давления жидкости на вертикальную стенку в форме эллипса с осями $2a$ и $2b$, центр которого погружен в жидкость на уровень $h\,(h \geqslant b)$ (удельный вес жидкости d).

7.12.12. Вычислить силу давления жидкости на боковые стенки кругового цилиндра, высота которого равна h, а радиус основания r. Удельный вес жидкости равен d, и жидкость полностью заполняет цилиндр.

7.12.13. Вычислить работу на преодоление силы тяжести, которую необходимо затратить, чтобы выкачать воду из резервуара, имеющего форму конуса, обращенного вершиной вниз. Высота конуса H, радиус основания R.

7.12.14. Вычислить работу, которую нужно затратить, чтобы растянуть пружину на 6 *см*, если сила 1 *кг* растягивает ее на 1 *см*.

§ 7.13. Вычисление статических моментов и моментов инерции. Определение координат центра тяжести

Во всех задачах этого параграфа мы будем считать, что масса равномерно распределена по телу (линейному, плоскому, пространственному) и что плотность равна единице.

1. Для плоской кривой L статические моменты M_x и M_y относительно координатных осей Ox и Oy выражаются формулами

$$M_x = \int\limits_L y\,dl, \qquad M_y = \int\limits_L x\,dl.$$

Момент инерции относительно начала координат

$$I_0 = \int\limits_L (x^2+y^2)\,dl.$$

При задании кривой L явным уравнением $y=y(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ в этих формулах надо заменить dl на $\sqrt{1+y'^2}\,dx$.

При задании кривой L параметрическими уравнениями $x=x(t)$, $y=y(t)$ $(t_1 \leqslant t \leqslant t_2)$ в этих формулах надо заменить dl на $\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt$.

2. Для плоской фигуры, ограниченной кривыми $y=y_1(x)$, $y=y_2(x)$, $y_1(x) \leqslant y_2(x)$ и прямыми $x=a$, $x=b\,(a \leqslant x \leqslant b)$ статические моменты выражаются формулами

$$M_x = \frac{1}{2}\int\limits_a^b (y_2^2-y_1^2)\,dx; \quad M_y = \int\limits_a^b x\,(y_2-y_1)\,dx.$$

3. Центр тяжести плоской кривой L имеет координаты $x_c = M_y/l$, $y_c = M_x/l$, где l — длина кривой L. Центр тяжести плоской фигуры имеет координаты $x_c = M_y/S$, $y_c = M_x/S$, где S — площадь фигуры.

7.13.1. Найти статический момент верхней части эллипса

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$$

относительно оси Ox.

Решение. Для эллипса

$$y\,dl = y\sqrt{1+y'^2}\,dx = \sqrt{y^2+(yy')^2}\,dx;$$